MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

22. BAND 3./4. HEFT

(AUSGEGEBEN AM 28. FEBRUAR 1925)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1925

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, deren vier zu einem Bande vereinigt werden sollen.

Jährlich sollen drei Bände herausgegeben werden. Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Königsberg, Bergplatz 6,
L. Lichtenstein, Leipzig, Talstraße 35, Mathematisches Institut,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

22. Band. **Inhalt:** 3./4. Heft.

Seite

Walfisz, A., Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern . . 153
Landau, E., Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Walfisz: Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern 189
Amirà, B., Sur un théorème de M. Wiman dans la théorie des fonctions entières 206
Prüfer, H., Theorie der Abelschen Gruppen. II. Ideale Gruppen 222
Fraenkel, A., Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre 250
Khintchine, A., Zwei Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn Perron 274
Bernstein, F. und G. Doetsch, Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. I. Mitteilung. Eine neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen. Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur 285
Doetsch, G., Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. II. Mitteilung. Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur. Die allgemeinste Lösung und die Frage der Eindeutigkeit 293
Moore, R. L., Concerning the prime parts of a continuum 307
Khintchine, A., Bemerkung zu meiner Abhandlung „Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen“ 316

Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern.

Von

Arnold Walfisz in Warschau.

---

1. Die vorliegende Abhandlung ist einem Beweise des folgenden Hauptsatzes gewidmet:

Es seien: $\mathfrak{K}$ *ein algebraischer Zahlkörper* k*-ten Grades mit der Grundzahl* Δ*;* r_1 *die Anzahl der zu* $\mathfrak{K}$ *konjugierten reellen Körper,* r_2 *die halbe Anzahl der imaginären; m eine ganze positive Zahl;* $mk = \varkappa$, $mr_1 = \varrho_1$, $mr_2 = \varrho_2$; $|\Delta|^m = D$; $\tau = \varkappa 2^{\frac{\varrho_1}{\varkappa}}$;

(1.1) $$A = 2^{-r_2}\pi^{-\frac{k}{2}}\sqrt{|\Delta|}; \qquad \mathsf{A} = A^m;$$

$\zeta_{\mathfrak{K}}(s)$ *die zu* $\mathfrak{K}$ *gehörige Dedekindsche Zetafunktion;* $\mathsf{Z}(s) = \zeta_{\mathfrak{K}}^m(s)$;[1] $s = \sigma + it$;

(1.2) $(\sigma > 1)$ $$\mathsf{Z}(s) = \sum^{\infty} \frac{F(n)}{n^s};$$

$F(x) > 0$; $F(x) = 0$ *für nichtganzes* x;

$$\sum_{n \leqq x} F(n) = H(x);$$

(1.3) $R(x)$ *das Residuum von* $\mathsf{Z}(s)\frac{x^s}{s}$ *für* $s = 1$;

(1.4) $$G(s) = \frac{\Gamma^{\varrho_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{\varrho_2}(1-s)}{\Gamma^{\varrho_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{\varrho_2}(s)};$$

(1.5) $(w > 0)$ $$J_{\varrho_1,\,\varrho_2}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty} G(s)\left(\frac{w}{\tau}\right)^{\varkappa s - 1}\frac{ds}{s}.$$

[1] $\zeta_{\mathfrak{K}}^m(s) = \left(\zeta_{\mathfrak{K}}(s)\right)^m$, und ebenso in allen analogen Fällen.

Dann ist

$$(1.6)\quad H(x)-\frac{1}{2}F(x)=R(x)+Z(0)+A\sqrt[\varkappa]{\frac{x}{A^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{1-\frac{1}{\varkappa}}J_{\varrho_1,\varrho_2}\left(2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right),$$

wobei die unendliche Reihe folgendes Verhalten zeigt:

1. *Für* $1\leqq\varkappa\leqq 2$ *konvergiert sie, und zwar gleichmäßig in jedem Intervall* $0<x_0\leqq x\leqq x_1$ *mit* $F(x)=0$.

2. *Für* $\varkappa\geqq 3$ *ist sie für jedes* $\varepsilon>0$ *nach arithmetischen Mitteln*[2]) *von der Ordnung* $\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon$ *summabel, kurz* $\left(n,\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon\right)$ *summabel, und zwar bei festem* ε *gleichmäßig in jedem Intervall* $0<x_0\leqq x\leqq x_1$ *mit* $F(x)=0$.

3. *Für* $\varkappa\geqq 3$ *ist sie nicht summabel* $\left(n,\frac{\varkappa-3}{2}\right)$, *und zwar durchweg für jedes* x.

Die §§ 2—8 bringen 7 Hilfssätze, § 9 den Beweis des Hauptsatzes. In § 10 werden die schon bekannten Spezialfälle des Hauptsatzes diskutiert und genaue Literaturangaben gemacht. Vorgreifend sei hier nur erwähnt, daß der Hauptsatz eine Verallgemeinerung (die an sich unwesentlich ist und nur, um Rechnungen zusammenzufassen, vorgenommen wird) und Verschärfung zweier Sätze meiner Göttinger Dissertation[3]) ist, daß ferner die zur Anwendung gelangende Methode von G. H. Hardy[4]) herrührt.

2. Hilfssatz 1. *Das Integral* (1.5) *konvergiert absolut und stellt eine für* $w>0$ *stetige Funktion dar. Für* $w\to\infty$ *und ganzes* g *wird, mit gewissen reellen Konstanten* $a^{(1)},\ldots,a^{(g)},\ b^{(1)},\ldots,b^{(g)}$,

$$(2.1)\quad J_{\varrho_1,\varrho_2}(w)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^{\frac{\varrho_1}{\varkappa}-\frac{\varrho_1}{2}}}{\varkappa^{\frac{\varkappa-2}{2}}}\cos\left\{w+\frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi\right\}w^{\frac{\varkappa-3}{2}}$$

$$+w^{\frac{\varkappa-3}{2}}\cos w\cdot\left(\frac{a^{(1)}}{w}+\ldots+\frac{a^{(g)}}{w^g}\right)+w^{\frac{\varkappa-3}{2}}\sin w\cdot\left(\frac{b^{(1)}}{w}+\ldots+\frac{b^{(g)}}{w^g}\right)+O\left(w^{\frac{\varkappa-3}{2}-g-1}\right).$$

Beweis[5]). Es ist, wenn s nicht auf der negativen Abszissenachse

[2]) Über diesen Begriff vgl. den Anfang von § 5.

[3]) „Über die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen" Inaugural-Dissertation [Göttingen (1922) bei W. Fr. Kaestner, 56 S.]. Die Kenntnis dieser Arbeit wird, da sie als Privatdruck erschien, im folgenden nicht vorausgesetzt. Zitiert als *Dissertation*.

[4]) G. H. Hardy, „On the expression of a number as the sum of two squares" [Quarterly Journal **46** (1915), S. 263—283].

[5]) Dieser Beweis wurde mir — als Ersatz für meinen ursprünglichen, der mit linearen Differentialgleichungen operierte und ziemlich langwierig war — i. J. 1921 von Prof. Landau mitgeteilt (vgl. *Dissertation*, S. 1 und S. 32).

egt und log s den Hauptwert bedeutet, mit gewissen reellen Konstanten
$_1, \ldots, A_{g+1}$

2.2) $$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi}\, e^{(s-\frac{1}{2})\log s - s}\left(1 + \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \ldots + \frac{A_{g+1}}{s^{g+1}} + \psi(s)\right),$$

vo in jedem festen Streifen, gleichmäßig in σ

2.21) $(\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2)$ $\qquad \psi(s) = O\left(|t|^{-g-2}\right)$.[6])

us (2.2) und (2.21) folgt zunächst, daß für $0 < w_0 \leqq w \leqq w_1$ der Inte-
rand (1.5)

$$O\left(|t|^{-\frac{\varkappa}{4}-1}\right),$$

nd zwar gleichmäßig in w ist, woraus die beiden ersten Behauptungen
olgen.

Ich setze

$$\mathfrak{e} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \varrho = \varrho_1 + \varrho_2 - 1 \text{ gerade}, \\ 1, & \text{„ } \varrho = \varrho_1 + \varrho_2 - 1 \text{ ungerade}. \end{cases}$$

odann ist[7])

2.3) $(n \geqq \text{ganz},\ u > 0)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3\varkappa}{8}-i\infty}^{\frac{3\varkappa}{8}+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\varkappa+\mathfrak{e}}{2}-s\right)}{\Gamma\left(s+n+1+\frac{\mathfrak{e}}{2}\right)} u^s\, ds = u^{\frac{\varkappa}{4}-\frac{n}{2}} J_{\frac{\varkappa}{2}+n+\mathfrak{e}}\left(2\sqrt{u}\right),$$

vo J die Besselsche Funktion erster Art bedeutet.

Aus (2.2), (2.21) folgt mit gewissen reellen Konstanten $B_1, \ldots, B_{g+1}$

2.4) $$\frac{G(s)}{s} = (-1)^{\frac{\varrho+\mathfrak{e}}{2}} \frac{\varkappa}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\varkappa+\mathfrak{e}}{2}-\frac{\varkappa s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\varkappa s+\mathfrak{e}}{2}+1\right)} \left(\frac{\varkappa^\varkappa}{4^{\varrho_2}}\right)^{s-\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{\varkappa+\mathfrak{e}}{2}-\frac{\varkappa s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\varkappa s+\mathfrak{e}}{2}+1\right)} \left(\frac{\varkappa^\varkappa}{4^{\varrho_2}}\right)^s \left\{ \frac{B_1}{\left(\frac{\varkappa s+\mathfrak{e}}{2}+1\right)} + \ldots + \frac{B_{g+1}}{\left(\frac{\varkappa s+\mathfrak{e}}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{\varkappa s+\mathfrak{e}}{2}+g+1\right)} \right\} + \psi_3(s)$$

$$= \psi_1(s) + \psi_2(s) + \psi_3(s),$$

[6]) Die Stirlingsche Formel in dieser Tragweite wurde zuerst von Stieltjes egründet: „Sur le développement de $\log \Gamma(a)$“ [Journal de Mathématiques, Ser. 4, **5** 1889), S. 425–444. Vgl. auch „Œuvres complètes“ 2, Groningen 1918, S. 211–230]. Ein besonders eleganter Beweis findet sich bei Hj. Mellin: „Eine Formel für den Logarithmus transzendenter Funktionen von endlichem Geschlecht“ [Acta Math. **25** 1902), S. 165–183], S. 165–171 (passim).

[7]) In einer allgemeinen Formel von E. Landau enthalten: „Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid)“ [Berliner Akademieberichte 1915, S. 458–476], . 468–469.

wobei $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, $\psi_3(s)$ im Streifen

$$\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}-\frac{g}{\varkappa}\leqq\sigma\leqq\frac{3}{4}$$

regulär sind, und überdies dort gleichmäßig in σ

$$(2.41)\qquad \psi_3(s)=\psi_{3,g}(s)=O\Big(|t|^{\frac{\varkappa}{2}-\varkappa\sigma-1-g-2}\Big)=O\Big(|t|^{-\frac{3}{2}}\Big).$$

Aus (1.5) und (2.4) folgt

$$(2.5)\quad (w>0)\qquad J_{\varrho_1,\varrho_2}(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty}\psi_1(s)\Big(\frac{w}{\tau}\Big)^{\varkappa s-1}ds$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty}\psi_2(s)\Big(\frac{w}{\tau}\Big)^{\varkappa s-1}ds+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty}\psi_3(s)\Big(\frac{w}{\tau}\Big)^{\varkappa s-1}ds=J_1+J_2+J_3.$$

Wendet man jetzt (2.3) an, so ergibt sich aus (2.5) und der Definition von τ

$$J_1=(-1)^{\frac{\varrho+\mathfrak{e}}{2}}\frac{2^{\varrho_2}}{\varkappa^{\frac{\varkappa}{2}}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty}\frac{\Gamma\Big(\frac{\varkappa+\mathfrak{e}}{2}-\frac{\varkappa s}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{\varkappa s+\mathfrak{e}}{2}+1\Big)}\Big(\frac{\varkappa^{\varkappa}}{4^{\varrho_2}}\Big)^{s}\Big(\frac{w}{\tau}\Big)^{\varkappa s-1}\frac{\varkappa}{2}\,ds$$

$$=(-1)^{\frac{\varrho+\mathfrak{e}}{2}}\frac{2^{\varrho_2}}{\varkappa^{\frac{\varkappa}{2}}}\frac{\tau}{w}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3\varkappa}{8}-i\infty}^{\frac{3\varkappa}{8}+i\infty}\frac{\Gamma\Big(\frac{\varkappa+\mathfrak{e}}{2}-s\Big)}{\Gamma\Big(s+1+\frac{\mathfrak{e}}{2}\Big)}\Big(\frac{w^2}{4}\Big)^{s}ds$$

$$=(-1)^{\frac{\varrho+\mathfrak{e}}{2}}\frac{2^{\frac{\varrho_1}{\varkappa}-\frac{\varrho_2}{2}}}{\varkappa^{\frac{\varkappa-2}{2}}}w^{\frac{\varkappa-2}{2}}J_{\frac{\varkappa}{2}+\mathfrak{e}}(w).$$

Setzt man hierin für $J_{\frac{\varkappa}{2}+\mathfrak{e}}$ die bekannte semikonvergente Entwicklung ein, so sieht man, daß J_1 genau die Form der Behauptung (2.1) hat (selbstredend mit anderen Konstanten $a^{(\mu)}$, $b^{(\mu)}$). Gleicherweise wird, wiederum unter Benutzung von (2.3), mit geeigneten positiven, nur von ϱ_1, ϱ_2 abhängigen α_1, α_2

$$J_2 = \frac{\alpha_1}{w} \sum_{n=1}^{g+1} B_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\varkappa+\varepsilon}{2} - \frac{\varkappa s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\varkappa s+\varepsilon}{2} + n + 1\right)} \left(\frac{w^\varkappa}{2^\varkappa}\right)^s \frac{\varkappa}{2}\, ds$$

$$= \frac{\alpha_1}{w} \sum_{n=1}^{g+1} B_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3\varkappa}{8}-i\infty}^{\frac{3\varkappa}{8}+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\varkappa+\varepsilon}{2} - s\right)}{\Gamma\left(s+n+1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} \left(\frac{w^2}{4}\right)^s ds$$

$$= \frac{\alpha_2}{w} \sum_{n=1}^{g+1} B_n w^{\frac{\varkappa}{2}-n} J_{\frac{\varkappa}{2}+n+\varepsilon}(w).$$

ies hat — nach Einsetzung der semikonvergenten Entwickelungen für $_{+n+\varepsilon}(w)$ — genau die Form der drei letzten Glieder von (2.1).

Endlich ist, wegen (2.41)

$$J_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty} \psi_3(s) \left(\frac{w}{\tau}\right)^{\varkappa s-1} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}-\frac{g}{\varkappa}-i\infty}^{\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}-\frac{g}{\varkappa}+i\infty}$$

$$= O\left(w^{\frac{\varkappa-3}{2}-g-1}\right).$$

3. Hilfssatz 2. *Die durch die Potenzreihe*

$$.1) \qquad L_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^\varkappa\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa} + \frac{n}{\varkappa}\right)}{\Gamma(1+n)} s^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n \qquad (\varkappa \geqq 2 \text{ ganz})$$

finierte analytische Funktion $L_1(s)$ hat im Endlichen neben $s = \varkappa$ entuell noch Singularitäten nur an den Stellen

$$.11) \qquad s = \varkappa e^{\frac{2\lambda\pi i}{\varkappa}} \qquad (1 \leqq \lambda \leqq \varkappa - 1),$$

urz $s = \varkappa\eta$, wo η eine von Eins verschiedene $\varkappa$-te Einheitswurzel ist. der Umgebung von $s = \varkappa$ hat der durch (3.1) definierte Zweig die estalt

$$.12) \quad L_1(s) = p(s)\log(s-\varkappa) + p_0(s) + p_2(s)\log^2(s-\varkappa) + \ldots + p_{\varkappa-1}(s)\log^{\varkappa-1}(s-\varkappa),$$

obei alle p-Funktionen dort regulär sind, und überdies

$$.13) \qquad p(\varkappa) = -(2\pi)^{\frac{\varkappa-1}{2}} \varkappa^{\frac{1}{2}}; \qquad p_2(\varkappa) = \ldots = p_{\varkappa-1}(\varkappa) = 0.$$

In der Umgebung von $s = \varkappa\eta$ hat der obige Zweig die Form

$$(3.14)\quad L_1(s) = q_\eta(s)\log(s-\varkappa\eta) + q_{0,\eta}(s) + q_{2,\eta}(s)\log^2(s-\varkappa\eta) + \ldots + q_{\varkappa-1,\eta}(s)\log^{\varkappa-1}(s-\varkappa\eta),$$

mit dort regulären q-Funktionen und

$$(3.15)\qquad q_\eta(\varkappa\eta) = q_{2,\eta}(\varkappa\eta) = \ldots = q_{\varkappa-1,\eta}(\varkappa\eta) = 0.$$

Beweis. Ich gehe von der bekannten Formel

$$(x>0)\quad \log\Gamma(1+x) = \left(\frac{1}{2}+x\right)\log x - x + \log\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

aus und erhalte

$$\log c_n = -n\log\varkappa - \log n + \frac{1}{2}\log\varkappa + (\varkappa-1)\log\sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$(3.21)\qquad c_n = (2\pi)^{\frac{\varkappa-1}{2}}\varkappa^{\frac{1}{2}}\frac{1}{n\varkappa^n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\varkappa^{-n},$$

$$L_1(s) = (2\pi)^{\frac{\varkappa-1}{2}}\varkappa^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{s}{\varkappa}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}O\left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{s}{\varkappa}\right)^n$$

$$(3.22)\qquad = -(2\pi)^{\frac{\varkappa-1}{2}}\varkappa^{\frac{1}{2}}\log(s-\varkappa) + f(s),$$

wo $f(s)$ eine im Kreise $|s| \leqq \varkappa$ konvergente Potenzreihe ist.

Ich will jetzt nachweisen, daß $L_1(s)$ der linearen Differentialgleichung

$$(3.3)\quad (s^\varkappa - \varkappa^\varkappa)L_1^{(\varkappa)} + a_1 s^{\varkappa-1}L_1^{(\varkappa-1)} + \ldots + a_{\varkappa-1}sL_1' + a_\varkappa L_1 = 0,$$

mit gewissen konstanten Koeffizienten $a_1, \ldots, a_\varkappa$, von denen

$$(3.31)\qquad a_1 = \varkappa(\varkappa-1)$$

ist, genügt. Durch Differentiation von (3.1) ergibt sich zunächst, wenn noch a_0 Eins bedeutet,

$$(0 \leqq \nu \leqq \varkappa)\quad a_{\varkappa-\nu}s^\nu L_1^{(\nu)}(s) = a_{\varkappa-\nu}\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{\Gamma^\varkappa\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+\frac{n}{\varkappa}\right)}{\Gamma(1+n-\nu)}s^n,$$

$$-\varkappa^\varkappa L_1^{(\varkappa)}(s) = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\varkappa-1}{2}+n\right)^\varkappa\frac{\Gamma^\varkappa\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+\frac{n}{\varkappa}\right)}{\Gamma(1+n)}s^n.$$

Indem man hieraus die linke Seite von (3.3) bildet und die Koeffizienten von $s^0, s^1, \ldots, s^{\varkappa-1}$ gleich Null setzt, erhält man die Rekursionsformeln

$$(3.41)\quad (0 \leqq \nu \leqq \varkappa-1)$$

$$a_{\varkappa-\nu} = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\varkappa-1}{2}+\nu\right)^\varkappa - \left\{\frac{1}{1!}a_{\varkappa-\nu+1} + \frac{1}{2!}a_{\varkappa-\nu+2} + \ldots + \frac{1}{\nu!}a_k\right\}.$$

Analog erhält man durch Nullsetzen des Koeffizienten von s^n $(n \geqq \varkappa)$ die Beziehungen

$$\text{(3.42)} \qquad \sum_{\nu=0}^{\varkappa} a_{\varkappa-\nu}\, n(n-1)\ldots(n-\nu+1) - \left(\frac{\varkappa-1}{2}+n\right)^{\varkappa} = 0\,.$$

Hier hebt sich noch das Glied $n^\varkappa$ weg, und es bleibt ein Polynom höchstens $(\varkappa-1)$-ten Grades in n übrig. Es genügt also, die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_\varkappa$ so zu wählen, daß (3.42) für $n = 0, 1, \ldots, \varkappa-1$ erfüllt wird. Damit kommt man aber gerade auf die Rekursionsgleichungen (3.41). Diese ergeben durch Induktion

$$(0 \leqq \nu \leqq \varkappa-1) \qquad a_{\varkappa-\nu} = -\frac{1}{\nu!}\sum_{\mu=0}^{\varkappa-1}(-1)^{\varkappa}\binom{\nu}{\nu+\mu-\varkappa+1}\left(\frac{\varkappa-1}{2}-\nu-\mu\right)^{\varkappa},$$

also insbesondere

$$a_1 = -\frac{1}{(\varkappa-1)!}\sum_{\mu=0}^{\varkappa-1}(-1)^{\mu}\binom{\varkappa-1}{\mu}\left(\frac{1-\varkappa}{2}-\mu\right)^{\varkappa}.$$

Nun ist identisch in x

$$\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}(x-\mu)^n = n!\,.^{8})$$

Hieraus folgt

$$\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}(x-\mu)^{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)!\,(2x-n),$$

d. h. also

$$a_1 = -\frac{1}{(\varkappa-1)!}\frac{1}{2}\varkappa!\,(1-\varkappa-\varkappa+1) = \varkappa(\varkappa-1),$$

womit (3.31) bestätigt ist.

Für die singulären Punkte von $L_1(s)$ kommen — wie man sofort aus (3.3) ablesen kann — nur die Nullstellen des Koeffizienten von $L_1^{(\varkappa)}$ in Frage, d. h. neben $s = \varkappa$ noch die Werte (3.11).

$s = \varkappa$ ist, wie (3.22) zeigt, sicherlich singulär. Die zugehörige determinierende Fundamentalgleichung[9]) hat hier die Form

$$r(r-1)\ldots(r-\varkappa+1) + \frac{a_1}{\varkappa}r(r-1)\ldots(r-\varkappa+2) = 0\,,$$

d. h. nach (3.31)

$$\text{(3.5)} \qquad r^2(r-1)\ldots(r-\varkappa+2) = 0\,.$$

---

[8]) Vgl. E. Netto, „Lehrbuch der Kombinatorik" [Leipzig und Berlin bei B. G. Teubner, 1901, 260 S.], S. 249, Formel (17).

[9]) Vgl. für das folgende J. Horn, „Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung" [Leipzig, Göschen, 1905, Sammlung Schubert Nr. L, 391 S.], S. 156—162.

Ihre Wurzeln sind somit

$$r = 0\,, \quad r = 1\,, \quad r = 2\,, \quad \ldots\,, \quad r = \varkappa - 2\,.$$

Hieraus folgt (3.12) und, in Verbindung mit (3.22), auch (3.13). Zu den Stellen (3.11) gehört jedesmal dieselbe determinierende Fundamentalgleichung wie zu $s = \varkappa$, d. h. (3.5). Aus (3.22) folgen nunmehr auch (3.14) und (3.15).

4. Hilfssatz 3. *Die $g+1$ Funktionen ($\varkappa \geqq 2$ ganz)*

$$(4.1) \quad (0 \leqq l \leqq g,\ \sigma > 0) \qquad \Psi_l(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2} + \frac{1+2l}{2\varkappa}}}\, e^{-\sqrt[\varkappa]{n}\, s} \qquad (\Psi_0(s) = \Psi(s))$$

sind auf der oberen imaginären Achse ($\sigma = 0\,,\ t > 0$), mit Ausnahme der Punkte

$$(4.11) \qquad t = \gamma = \gamma_q = 2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{q}{D}} \qquad (F(q) \neq 0)$$

regulär; um $s = \gamma i$ haben sie die Form

$$(4.12) \quad \Psi(s) = -\, e^{(\varrho_1 - 1)\frac{\pi i}{4}}\, \varkappa^{\frac{1}{2}}\, D^{-\frac{1}{2\varkappa}}\, \frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa}}} \log(s - \gamma i) + e_q + O\,|s - \gamma i|^{\frac{1}{2}},$$

$$(4.13) \qquad (1 \leqq l \leqq g) \qquad \Psi_l(s) = f_{l,q} + O\,|s - \gamma i|^{\frac{1}{2}}.$$

Hierbei sind e_q und $f_{l,q}$ Konstanten, $\log(s - \gamma i)$ der Hauptzweig (also reell für $s = \sigma + \gamma i$, $\sigma > 0$), und die O-Zeichen beziehen sich auf beliebige Annäherungen an den Punkt $s = \gamma i$ von der rechten Halbebene $\sigma > 0$ aus.

Beweis. Da die Ψ_l-Funktionen mit $l \geqq 1$ der Differentialgleichung

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^l \Psi_l(s) = (-1)^l\, \Psi(s)$$

genügen, so brauche ich nur die auf $\Psi(s)$ bezugnehmenden Behauptungen nachzuweisen.

Den Ausgangspunkt bildet die bekannte Mellinsche Integraldarstellung der Exponentialfunktion

$$(4.2) \quad \left(\sigma > 0\,,\ c > 0\,,\ |\arc s| < \frac{\pi}{2}\right) \qquad e^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{-z}\, \Gamma(z)\, dz\,.$$

Hieraus folgt, in Verbindung mit (4.1) und (1.2),

$$\left(\sigma > 0\,,\ c > \frac{\varkappa - 1}{2}\right) \qquad \Psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{-z}\, \Gamma(z)\, \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varkappa} + \frac{z}{\varkappa}}}\, dz$$

$$(4.3) \qquad = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{-z}\, \Gamma(z)\, Z\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varkappa} + \frac{z}{\varkappa}\right) dz\,.$$

Die Vertauschung von Summation und Integration ist hier erlaubt, da unter den obigen Voraussetzungen, $z = c + iy$ gesetzt, wegen der absoluten Konvergenz der Z-Reihe für $\sigma > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| s^{-z}\Gamma(z)\frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+\frac{z}{\varkappa}}} \right| = \left| s^{-(c+iy)}\Gamma(c+iy) \right| Z\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+\frac{c}{\varkappa}\right)$$

$$= O\left(e^{-|y|\left(\frac{\pi}{2}-|\arc s|\right)} |y|^{c-\frac{1}{2}}\right).$$

Der Integrand von (4.3) ist meromorph[10]): für $z = \frac{\varkappa - 1}{2}$ liegt ein Pol m-ter Ordnung vor, gewisse der Punkte $s = 0, -1, -2, \ldots$ sind Pole erster Ordnung, alle anderen s aber Regularitätsstellen.

Bei festem ganzen $p > 0$ darf man in (4.3) den Integrationsweg von $x = c$ $(z = x + iy)$ bis auf $x = -p - \frac{1}{2}$ verschieben. Denn im Streifen $-p - \frac{1}{2} \leqq x \leqq c$ ist gleichmäßig (α von y unabhängig).

$$Z\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+\frac{z}{\varkappa}\right) = O(|y|^{\alpha}),\ ^{11})$$

und daher dort der Integrand gleichmäßig $o(1)$. Bezeichnet $R_1(s)$ das betreffende Residuum für $z = \frac{\varkappa - 1}{2}$, d. h. eine für $\sigma = 0$, $t > 0$ reguläre Funktion, so folgt mithin aus (4.3)

$$\Psi(s) = R_1(s) + \sum_{n=0}^{p} \frac{(-s)^n}{n!} Z\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}-\frac{n}{\varkappa}\right) + J_p, \tag{4.4}$$

$$J_p = \frac{1}{2\pi i} \int_{p-\frac{1}{2}-i\infty}^{p-\frac{1}{2}+i\infty} s^{-z}\Gamma(z) Z\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+\frac{z}{\varkappa}\right) dz. \tag{4.41}$$

Ich will jetzt

$$\lim_{p=\infty} J_p = 0 \quad \text{für} \quad 0 < s < \frac{2\varkappa\pi}{\sqrt[\varkappa]{D}} \tag{4.42}$$

nachweisen.

---

[10]) Die funktionentheoretischen Eigenschaften von $\zeta_{\mathfrak{R}}(s)$, d. h. von $Z(s)$, welche im folgenden benutzt werden (der meromorphe Charakter, Abschätzung in vertikalen Streifen und Funktionalgleichung) sind von E. Hecke, „Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper" [Göttinger Nachrichten 1917, S. 77—89] nachgewiesen worden. Eine systematische Darstellung dieser Resultate und ihrer Anwendungen auf analytische Idealtheorie gibt E. Landau in seinem Buche „Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale" [Leipzig und Berlin bei B. G. Teubner, 1918, 143 S.; zitiert als „Ideale"]; für die obige Textstelle vgl. Satz 155, Absätze 1 und 3, S. 74—75.

[11]) „Ideale", Satz 169, S. 84.

$Z(s)$ genügt der Funktionalgleichung[12])

$$(4.43)\quad Z(1-s)=\left(\frac{2}{(2\pi)^s}\right)^{\varkappa} D^{s-\frac{1}{2}}\cos^{\varrho_1+\varrho_2}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\sin^{\varrho_2}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma^{\varkappa}(s)\,Z(s).$$

Auf (4.41) angewandt, ergibt dies mit $z=-p-\frac{1}{2}+iy$

$$Z\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+\frac{z}{\varkappa}\right)\Big| = \left(\frac{2}{(2\pi)^{\frac{p}{\varkappa}+\frac{1}{2}}}\right)^{\varkappa} D^{\frac{p}{\varkappa}}\Big|\cos^{\varrho_1+\varrho_2}\frac{\pi}{2}\left(\frac{p}{\varkappa}+\frac{1}{2}-\frac{i}{\varkappa}y\right)$$

$$\times\sin^{\varrho_2}\frac{\pi}{2}\left(\frac{p}{\varkappa}+\frac{1}{2}-\frac{i}{\varkappa}y\right)\Gamma^{\varkappa}\left(\frac{p}{\varkappa}+\frac{1}{2}-\frac{i}{\varkappa}y\right)Z\left(\frac{p}{\varkappa}+\frac{1}{2}-\frac{i}{\varkappa}y\right)\Big|,$$

und hieraus folgt für $p\geqq\varkappa$, wenn $K>0$ geeignete von p, y, s unabhängige Konstanten sind,

$$(4.44)\quad \left|Z\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+\frac{z}{\varkappa}\right)\right| < K\frac{1}{(2\pi)^p}D^{\frac{p}{\varkappa}}e^{\frac{\pi}{2\varkappa}(\varrho_1+\varrho_2)|y|+\frac{\pi}{2\varkappa}\varrho_2|y|}\left|\Gamma^{\varkappa}\left(\frac{p}{\varkappa}+\frac{1}{2}-\frac{i}{\varkappa}\right.\right.$$

Wegen $\varrho_1+\varrho_2=\varkappa$ und

$$(4.45)\quad |s^{-z}\Gamma(z)| = \left|\frac{\pi s^{-z}}{\sin\pi z\,\Gamma(1-z)}\right| < K\frac{s^{p+\frac{1}{2}}e^{-\pi|y|}}{\left|\Gamma\left(p+\frac{3}{2}-iy\right)\right|}$$

folgt aus (4.44) weiter

$$(4.46)\quad \left|s^{-z}\Gamma(z)Z\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+\frac{z}{\varkappa}\right)\right| < K\left(\frac{s\sqrt[\varkappa]{D}}{2\pi}\right)^p e^{-\frac{\pi}{2}|y|}\,|Q|,$$

$$(4.47)\quad Q=\frac{\Gamma^{\varkappa}\left(\frac{p}{\varkappa}+\frac{1}{2}-\frac{i}{\varkappa}y\right)}{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}-iy\right)}.$$

Nach einer bekannten Abschätzung der Gammafunktion[13]) ist gleichmäßig bei $|s|\to\infty$ ($\log\Gamma(s)$ und $\log s$ die für $s>0$ reellen Zweige)

$$(4.5)\quad \left(\sigma\geqq\frac{3}{2}\right)\qquad \log\Gamma(s)=\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s-s+O(1).$$

Auf (4.47) angewandt ergibt dies, wenn das O-Zeichen auf alle y und $p\to\infty$ bezogen wird,

$$\log Q=-(p-iy)\log\varkappa-\log(p-iy)+O(1),$$

$$\Re\log Q\leqq -p\log\varkappa+\log(p(1+|y|))+O(1),$$

$$|Q|<K\frac{1}{\varkappa^p}p(1+|y|),$$

[12]) „Ideale“, Satz 165, S. 75.

[13]) Diese ergibt sich z. B. durch eine geringfügige Modifikation des Beweises von Satz 158, S. 78—79 der „Ideale“.

d. h., in Verbindung mit (4.46) und (4.41), für $0 < s < \frac{2\varkappa\pi}{\sqrt[\varkappa]{D}}$

$$|J_p| < K\left(\frac{s\sqrt[\varkappa]{D}}{2\varkappa\pi}\right)^p p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}|y|}(1+|y|)\,dy \to 0,$$

womit (4.42) nachgewiesen ist. (4.4) ergibt jetzt ($R_2(s)$ für $\sigma = 0$, $t > 0$ regulär)

$$(4.6)\quad \left(|s| < \frac{2\varkappa\pi}{\sqrt[\varkappa]{D}},\ s \neq 0\right) \qquad \Psi(s) = R_1(s) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} Z\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varkappa} - \frac{n}{\varkappa}\right)$$

$$= R_2(s) + \Phi(s),$$

$$(4.61)\quad \left(|s| < \frac{2\varkappa\pi}{\sqrt[\varkappa]{D}}\right) \qquad \Phi(s) = \sum_{n > \frac{\varkappa+1}{2}}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} Z\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varkappa} - \frac{n}{\varkappa}\right).$$

Die Potenzreihe $\Phi(s)$ repräsentiert einen um den Nullpunkt regulären Zweig einer analytischen Funktion. Die Gleichung (4.6), als Beziehung zwischen analytischen Funktionen gedeutet, gilt in deren ganzem Existenzbereich. Das Studium der Singularitäten von $\Psi(s)$ ist demnach auf das analoge Problem bei $\Phi(s)$ zurückgeführt. — Es werde jetzt zur Abkürzung

$$(x+1)^{\varrho_1}(x^2-1)^{\varrho_2} = \sum_{\mu=0}^{\varkappa} C_\mu x^\mu$$

gesetzt, so daß also

$$(4.62)\qquad C_\varkappa = 1$$

und

$$(4.63)\qquad \cos^{\varrho_1+\varrho_2}\alpha \sin^{\varrho_2}\alpha = \frac{1}{2^\varkappa} e^{-\varkappa\alpha i - \varrho_2\frac{\pi i}{2}} \sum_{\mu=0}^{\varkappa} C_\mu e^{2\mu\alpha i}.$$

Aus (4.43) und (4.63) folgt für $n \neq \frac{\varkappa+1}{2}$

$$(4.64)\qquad \frac{(-s)^n}{n!} Z\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varkappa} - \frac{n}{\varkappa}\right)$$

$$= (-1)^n \left(\frac{2}{(2\pi)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa} + \frac{n}{\varkappa}}}\right)^{\varkappa} D^{-\frac{1}{2\varkappa}+\frac{n}{\varkappa}} \cos^{\varrho_1+\varrho_2}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa} + \frac{n}{\varkappa}\right)$$

$$\times \sin^{\varrho_2}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa} + \frac{n}{\varkappa}\right) \frac{\Gamma^\varkappa\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa} + \frac{n}{\varkappa}\right)}{\Gamma(1+n)} Z\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa} + \frac{n}{\varkappa}\right) s^n$$

$$= (-1)^{\varrho_2} e^{-(\varrho_1-1)\frac{\pi i}{4}} \frac{D^{-\frac{1}{2\varkappa}}}{(2\pi)^{\frac{\varkappa-1}{2}}} \frac{\Gamma^\varkappa\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa} + \frac{n}{\varkappa}\right)}{\Gamma(1+n)} Z\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa} + \frac{n}{\varkappa}\right)$$

$$\times \sum_{\mu=0}^{\varkappa} C_\mu e^{\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa}\right)\mu i} \left(\frac{s\sqrt[\varkappa]{D}\, i\, e^{\frac{\pi}{\varkappa}\mu i}}{2\pi}\right)^n.$$

Aus (4.61) und (4.64) folgt

$$(4.65)\qquad \left(|s|<\frac{2\varkappa\pi}{\sqrt[\varkappa]{D}}\right)\qquad \Phi(s)=(-1)^{\varrho_2}e^{-(\varrho_1-1)\frac{\pi i}{4}}\frac{D^{-\frac{1}{2\varkappa}}}{(2\pi)^{\frac{\varkappa-1}{2}}}$$

$$\times\sum_{\mu=0}^{\varkappa}C_\mu e^{\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}\right)\mu i}M\left(\frac{s\sqrt[\varkappa]{D}\,i\,e^{\frac{\pi}{\varkappa}\mu i}}{2\pi}\right),$$

$$(4.66)\quad (|s|<\varkappa)\qquad M(s)=\sum_{n>\frac{\varkappa+1}{2}}\frac{\Gamma^\varkappa\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+\frac{n}{\varkappa}\right)}{\Gamma(1+n)}Z\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+\frac{n}{\varkappa}\right)s^n$$

$$=\sum_{n>\frac{\varkappa+1}{2}}c_n Z\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+\frac{n}{\varkappa}\right)s^n.$$

Hierbei ist c_n durch (3.1) gegeben. Nun werde in (4.66) für Z die Reihe (1.2) eingesetzt. Beide Summationen dürfen dann vertauscht werden (absolute Konvergenz), und es folgt

$$(4.67)\qquad (|s|<\varkappa)\qquad M(s)=\sum_{n>\frac{\varkappa+1}{2}}^{\infty}c_n s^n\sum_{q=1}^{\infty}\frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+\frac{n}{\varkappa}}}$$

$$=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}}\sum_{n>\frac{\varkappa+1}{2}}c_n\left(\frac{s}{\sqrt[\varkappa]{q}}\right)^n=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}}L\left(\frac{s}{\sqrt[\varkappa]{q}}\right).$$

Die Potenzreihe $L(s)$ unterscheidet sich zufolge (3.1) von $L_1(s)$ um ein Polynom. Wegen $F(q)=O(q^{\frac{3}{2}})$, was reichlich aus der Konvergenz von (1.2) für $\sigma>1$ folgt, ist für festes ganzes $p>0$ und $n>3\varkappa$

$$d_{n,p}=\sum_{q=p}^{\infty}\frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+\frac{n}{\varkappa}}}=O\sum_{q=p}^{\infty}q^{2-\frac{n}{\varkappa}}=O\left(p^{3-\frac{n}{\varkappa}}\right);$$

da ferner $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{c_n}=\frac{1}{\varkappa}$ (vgl. (3.21)), d. h. in Verbindung mit dem Vorigen $\overline{\lim\limits_{n=\infty}}\sqrt[n]{c_n\,d_{n,p}}\leqq\frac{1}{\varkappa\sqrt[\varkappa]{p}}$, so ist $\sum\limits_{n>\frac{\varkappa+1}{2}}c_n d_{n,p}s^n$ für $|s|<\varkappa\sqrt[\varkappa]{p}$ konvergent.

Andererseits ergibt (4.67)

$$(4.68)\qquad M(s)-\sum_{q=1}^{p-1}\frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}}L\left(\frac{s}{\sqrt[\varkappa]{q}}\right)=\sum_{q=p}^{\infty}\frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}}\sum_{n>\frac{\varkappa+1}{2}}c_n\left(\frac{s}{\sqrt[\varkappa]{q}}\right)^n$$

$$=\sum_{n>\frac{\varkappa+1}{2}}c_n\sum_{q=p}^{\infty}\frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+\frac{n}{\varkappa}}}s^n=\sum_{n>\frac{\varkappa+1}{2}}c_n d_{n,p}s^n.$$

Die linke Seite von (4.68) ist daher für $|s| < \varkappa\sqrt{p}$ regulär, und somit auch

$$M(s) - \sum_{q=1}^{p-1} \frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} L_1\left(\frac{s}{\sqrt[\varkappa]{q}}\right).$$

Ein Blick auf (4.65) zeigt demnach, daß die Differenz

$$\text{(4.69)} \qquad \Phi(s) - (-1)^{\varrho_2} e^{-(\varrho_1-1)\frac{\pi i}{4}} \frac{D^{-\frac{1}{2\varkappa}}}{(2\pi)^{\frac{\varkappa-1}{2}}} \sum_{\mu=0}^{\varkappa} C_\mu e^{\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}\right)\mu i}$$

$$\times \sum_{q=1}^{p-1} \frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} L_1\left(\frac{s\sqrt[\varkappa]{D}\, i\, e^{\frac{\pi}{\varkappa}\mu i}}{2\pi\sqrt[\varkappa]{q}}\right)$$

für $|s| < 2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{p}{D}}$ regulär ist. Welche Singularitäten weist nun der Subtrahendus in (4.69) auf der oberen imaginären Achse auf? Nach Hilfssatz 2 kommen nur Stellen $t = \gamma$, wo γ durch (4.11) gegeben ist, in Betracht; denn es muß doch sein

$$\left|\frac{s\sqrt[\varkappa]{D}\, i\, e^{\frac{\pi}{\varkappa}\mu i}}{2\pi\sqrt[\varkappa]{q}}\right| = \varkappa, \qquad F(q) \neq 0.$$

Damit ist zugleich, in Hinblick auf (4.6), die erste auf $\Psi(s)$ bezugnehmende Behauptung bewiesen. Ferner ergeben (4.6), (4.69), (3.12), (3.13), (3.14) und (3.15), daß um $s = \gamma i$

$$\text{(4.7)} \qquad \Psi(s) = \mathfrak{p}(s)\log(s-\gamma i) + \mathfrak{p}_0(s) + \mathfrak{p}_2(s)\log^2(s-\gamma i) + \ldots$$
$$+ \mathfrak{p}_{\varkappa-1}(s)\log^{\varkappa-1}(s-\gamma i),$$

wobei alle $\mathfrak{g}$-Funktionen dort regulär sind, und überdies

$$\text{(4.71)} \qquad \mathfrak{p}_2(\gamma i) = \ldots = \mathfrak{p}_{\varkappa-1}(\gamma i) = 0$$

ist. Um den Wert $\mathfrak{g}(\gamma i)$ zu bestimmen, ist zu beachten, daß für $s = \gamma i$ die Argumente von L_1 in (4.69) die Form $-\varkappa e^{\frac{\pi}{\varkappa}\mu i}$ haben. Von allen L_1-Funktionen, die sich superponieren, gibt also diejenige mit $-\varkappa e^{\frac{\pi}{\varkappa}\mu i} = \varkappa$, d. h. $\mu = \varkappa$ den Ausschlag. Aus (3.13), (4.6), (4.62) und (4.69) folgt daher

$$\text{72)} \qquad \mathfrak{p}(\gamma i) = (-1)^{\varrho_2} e^{-(\varrho_1-1)\frac{\pi i}{4}} \frac{D^{-\frac{1}{2\varkappa}}}{(2\pi)^{\frac{\varkappa-1}{2}}} C_\varkappa e^{\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}\right)\varkappa i} \frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} \cdot -(2\pi)^{\frac{\varkappa-1}{2}} \varkappa^{\frac{1}{2}}$$

$$= -e^{(\varrho_1-1)\frac{\pi i}{4}} \varkappa^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2\varkappa}} \frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}}.$$

Aus (4.7), (4.71) und (4.72) ergibt sich (4.12), mit der angegebenen Interpretation des O-Zeichens. Schließlich ist $\Psi(s)$ für $\sigma > 0$ regulär, also $\log(s - \gamma i)$ ein dort regulärer Zweig, der durch eine passende Abänderung von e_q für $s = \sigma + \gamma i$, $\sigma > 0$ reell gemacht werden kann.

5. Es seien ein $\alpha \geqq 0$ und eine reelle Zahlenfolge

$$0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \qquad (\lambda_n \to \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty)$$

gegeben. Dann heißt eine formal gegebene unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nach Rieszschen typischen Mitteln λ von der Ordnung α gegen C summabel, kurz (R, λ, α) gegen C summabel, wenn

$$\lim_{w=\infty} \frac{1}{w^{\alpha}} \sum_{\lambda_n < w} c_n (w - \lambda_n)^{\alpha} = C \tag{5.1}$$

ist[14]). Hängen außerdem die c_n von Variablen ab und ist (5.1) für irgendeinen Geltungsbereich der letzteren gleichmäßig erfüllt, so spricht man von gleichmäßiger Summabilität. Summabilität $(R, \lambda, 0)$ ist offenbar für alle Typen mit Konvergenz gleichbedeutend.

Es gilt folgendes Permanenzgesetz[15]): *Eine (R, λ, α) gegen C (gleichmäßig) summabele Reihe Σc_n ist für jedes $\alpha' \geqq \alpha$ auch (gleichmäßig) (R, λ, α') gegen C summabel.*

Für den Spezialtypus $\lambda_n = n$ ist, wie M. Riesz[16]) nachgewiesen hat, seine Methode mit der Cesàroschen (die für nicht ganze α durch K. Knopp und S. Chapman vervollständigt wurde) äquivalent, d. h. beide Methoden sind stets (gleichmäßig) zugleich anwendbar und liefern dieselben Resultate. Endlich haben noch K. Knopp und W. Schnee[17]) die Äquivalenz der Cesàro- und Hölder-Summabilit (letztere ist nur für ganzzahlige Ordnungen definiert) gezeigt. Man bezeichnet diese drei Mittelbildungen als arithmetische und die c-Folge als (n, α) summabel. Im folgenden sollen die Rieszschen Mittel den Rechnungen zugrunde gelegt werden.

[14]) Eine systematische Darstellung der Rieszschen Summabilitätstheorie und ihrer Anwendungen auf Dirichletsche Reihen geben G. H. Hardy und Marcel Riesz: „The general theory of Dirichlets series" [Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics, No. 18, Cambridge 1915, 78 S.; zitiert als Hardy-Riesz].

[15]) Hardy-Riesz, S. 29, Theorem 16. Dort wird zwar Gleichmäßigkeit nicht aufgenommen, doch gilt der Beweis von Theorem 16, Lemma 5, Lemma 6 dann wörtlich.

[16]) M. Riesz, „Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques", Comptes Rendus, 12. Juni 1911. Die Überlegungen bleiben auch für den nicht hervorgehobenen Fall der gleichmäßigen Summabilität bestehen.

[17]) Vgl. E. Landau, „Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie" [Berlin: Julius Springer 1916, 110 S.], S. 30—38. Die Überlegungen bleiben auch für den nicht hervorgehobenen Fall der gleichmäßigen Summabilität bestehen.

Hilfssatz 4. *Eine Zahlenfolge* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *erfülle bei festem* $\alpha \geqq 0$ *nd festem ganzen* $\varkappa > 0$ *eine der beiden Bedingungen*

5.2) $$a_n = o\left(n^{\frac{\alpha+1-\varkappa}{\varkappa}}\right),$$

5.3) $$\sum_{n<w^\varkappa} a_n e^{\sqrt[\varkappa]{n}}(w-\sqrt[\varkappa]{n})^\alpha = o(e^w w^\alpha),$$

o daß die Reihe

5.4) $$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\sqrt[\varkappa]{n}s}$$

ür $\sigma > 0$ *summabel* (n, α) *ist und dort eine analytische Funktion dar-tellt. Es gebe ein* $\mu > 0$ *und ein* $y > 0$, *ferner*

I) *ein reelles* t_0, *oder* II) *eine reelle* t_0*-Strecke* T: $b \leqq t_0 \leqq c$, $b < c$ *nd in beiden Fällen eine für* $|t - t_0| \leqq y$ *definierte einwertige Funktion* $B(t)$, *derart daß,*

$$|t - t_0| \leqq y, \qquad f(ti) = B(t)$$

esetzt, $f(s)$ *im Gebiete*

$$0 < |s - it_0| \leqq y, \qquad \sigma \geqq 0$$

tetig ist und dort dee Ungleichung (*Lipschitzbedingung*)

$$|f(s) - B(t_0)| < |s - it_0|^\mu$$

rfüllt (*was sicherlich der Fall ist, sobald* $f(s)$ *im Punkte* $s = it_0$ *oder ür* $s = it_0$, t_0 *auf* T *analytisch ist*).

Alsdann ist die Reihe (5.4)

I) *für* $s = it_0$ *summabel* (n, α) *gegen* $B(t_0)$;

der II) *für* $s = it_0$, t_0 *auf* T *gleichmäßig* (n, α) *summabel gegen* $B(t_0$.

Beweis. Alle Behauptungen mit Summabilität 1. $(R, \sqrt[\varkappa]{n}, \alpha)$ statt 2. (n, α) folgen aus Rieszschen Sätzen[18]). Die Äquivalenz von 1. und 2. st aber (als Spezialfall eines allgemeineren Satzes) von G. H. Hardy[19]) achgewiesen worden.

6. Hilfssatz 5. *Es seien* $\varkappa \geqq 2$ *ganz,* $b \geqq 0$ *ganz,* $0 < a \leqq 1$;

6.1) $(\sigma > 0)$ $$\varphi(s) = \varphi_{a,b}(s) = (-1)^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^b n}{n^a} e^{-\sqrt[\varkappa]{n}s}.$$

[18]) Vgl. die Sätze A_1 und C meiner Abhandlung „Über Summabilitätssätze von Marcel Riesz“ [Mathematische Annalen **93** (1924), S. 130–148].

[19]) G. H. Hardy, „The second theorem of consistency for summable series“ Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, **15** (1916), S. 72–88]. Die Überlegungen bleiben auch für den nicht hervorgehobenen Fall der gleichmäßigen Summabilität bestehen.

Dann ist $\varphi_{a,b}(s)$ auf der oberen imaginären Achse $(\sigma = 0,\ t > 0)$ regulär, und überdies

$$\varphi_{1,0}(s) = -\varkappa \log s + g(s), \tag{6.2}$$

mit ganzem transzendenten $g(s)$.

Beweis. Aus dem Mellinintegral (4.2) folgt (die Vertauschung von Summation und Integration wird wie beim Beweise von (4.3) gerechtfertigt)

$$(\sigma > 0,\ c > \varkappa(1-a)) \qquad \varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{-z}\,\Gamma(z)\,\frac{(-1)^b \log^b n}{n^{a+\frac{z}{\varkappa}}}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{-z}\,\Gamma(z)\,\zeta^{(b)}\left(a+\frac{z}{\varkappa}\right) dz. \tag{6.3}$$

Hierin läßt sich, nach bekannten Eigenschaften von Γ und ζ, bei ganzem $p > 0$ der Integrationsweg auf die Gerade $x = -p - \frac{1}{2}$ $(z = x + iy)$ verschieben, so daß aus (6.3) folgt

$$\varphi(s) = \varphi^*(s) + {\sum_{n=0}^{p}}' \frac{(-s)^n}{n!}\,\zeta^{(b)}\left(a-\frac{n}{\varkappa}\right) + J_p, \tag{6.31}$$

$$J_p = \frac{1}{2\pi i} \int_{-p-\frac{1}{2}-i\infty}^{-p-\frac{1}{2}+i\infty} s^{-z}\,\Gamma(z)\,\zeta^{(b)}\left(a+\frac{z}{\varkappa}\right) dz. \tag{6.32}$$

Σ' bedeutet hierbei, daß für $a = 1$ das Glied $n = 0$ wegzulassen und für $a = 1,\ b = 0$ überdies durch eine entsprechende, nur von $\varkappa$ abhängige Konstante zu ersetzen ist. Im letzteren Falle ist $\varphi^*(s) = -\varkappa \log s$ zu setzen. Allgemein ist $\varphi^*(s)$ für $\sigma = 0,\ t > 0$ regulär. (6.31) zeigt, daß für den Nachweis von (6.1) und (6.2) derjenige von

$$(s > 0 \text{ fest}) \qquad \lim_{p=\infty} J_p = 0 \tag{6.4}$$

hinreicht.

Es seien: $z = -p - \frac{1}{2} + iy$; a_1 irgendeine komplexe Zahl, die der Ungleichung $|a_1 - a| \leqq 1$ genügt; $u = u_1 + i u_2 = 1 - a_1 + \frac{p}{\varkappa} + \frac{1}{2\varkappa} - \frac{i}{\varkappa} y$; p so groß, daß $u_1 \geqq \frac{3}{2}$; $K > 0$ irgendwelche von p, y, s, a_1 unabhängige Konstanten. Aus der Funktionalgleichung der Zetafunktion folgt dann

$$\left|\zeta\left(a_1+\frac{z}{\varkappa}\right)\right| = \left|2(2\pi)^{-u}\cos\frac{\pi}{2}u\,\Gamma(u)\,\zeta(u)\right| < K e^{\frac{\pi}{2}|y|}\,|\Gamma(u)|,$$

und somit nach der Cauchyschen Integralformel

$$\left|\zeta^{(b)}\left(a+\frac{z}{\varkappa}\right)\right| < K e^{\frac{\pi}{2}|y|} \operatorname*{Max}_{|a_1-a|\leqq 1} |\Gamma(u)|. \tag{6.41}$$

Aus (4.45) und (6.41) folgt

$$\left|s^{-z}\Gamma(z)\zeta^{(b)}\left(a+\frac{z}{\varkappa}\right)\right| < K s^{p+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|y|} \operatorname*{Max}_{|a_1-a|\leqq 1} |Q|, \tag{6.42}$$

$$Q = \frac{\Gamma\left(1-a_1+\frac{p}{\varkappa}+\frac{1}{2\varkappa}-\frac{i}{\varkappa}y\right)}{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}-iy\right)}. \tag{6.43}$$

Wendet man nunmehr (4.5) auf (6.43) an, so folgt (die O-Zeichen gelten für $p \to \infty$, gleichmäßig in y und a_1)

$$\log Q = -\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)(p-iy)(\log(p-iy)-1) - \frac{\log\varkappa}{\varkappa}(p-iy) - \left(a_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}\right)\log(p-iy)+O(1),$$

$$\Re\log Q \leqq -\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)\left(\frac{p}{2}\log(p^2+y^2)-\frac{\pi}{2}|y|-p\right) + \log(p^2+y^2)+O(1),$$

$$\operatorname*{Max}_{|a_1-a|\leqq 1}|Q| < K e^{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)|y|+p}(p^2+y^2)^{-\frac{p}{4}+1} < K e^{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)|y|+p} p^{-\frac{p}{2}+2}(1+y^2).$$

In Verbindung mit (6.32) und (6.42) ergibt sich schließlich

$$|J_p| < K\left(\frac{3s}{\sqrt{p}}\right)^p p^2\sqrt{s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2\varkappa}|y|}(1+y^2)\,dy,$$

womit (6.4) nachgewiesen ist.

7. Hilfssatz 6. *Es seien $\alpha \neq 0$, β beide reell; $\varkappa \geqq 3$, $h \geqq 0$ beide ganz;*

$$P(y) = a y^h + \ldots + a_h$$

ein Polynom genau h-ten Grades mit reellen Koeffizienten.

Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\log n)\frac{\cos(\alpha\sqrt[\varkappa]{n}+\beta)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} \tag{7.1}$$

nicht $\left(n, \frac{\varkappa-3}{2}\right)$ summabel.

Beweis. Es bezeichnen: $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ reelle Konstanten $\neq 0$; $\beta_1, \ldots, \beta_{14}$ reelle Konstanten. Überdies sei $\varkappa_1 = \frac{\varkappa-3}{2}$.

Für $x > 1$ liefert die Eulersche Summenformel in einer ihrer primitiven Gestalten

$$(7.2)\quad S(x)=\sum_{1\leqq n\leqq x}P(\log n)\frac{\cos(\alpha\sqrt[\varkappa]{n}+\beta)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}}=\int_1^x P(\log u)\frac{\cos(\alpha\sqrt[\varkappa]{u}+\beta)}{u^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}}\,du$$

$$+\frac{1}{2}P(0)\cos(\alpha+\beta)-\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)P(\log x)\frac{\cos(\alpha\sqrt[\varkappa]{x}+\beta)}{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}}$$

$$+\int_1^x\left(u-[u]-\frac{1}{2}\right)\frac{d}{du}\left\{P(\log u)\frac{\cos(\alpha\sqrt[\varkappa]{u}+\beta)}{u^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}}\right\}du.$$

Da das zweite Integral auf der rechten Seite von (7.2) für $x=\infty$ konvergiert, so folgt für $x\to\infty$

$$(7.3)\qquad S(x)=\varkappa\int_1^{\sqrt[\varkappa]{x}}P(\varkappa\log v)\cos(\alpha v+\beta)v^{\varkappa_1}dv+\beta_1+o(1).$$

Aus (7.3) geht sofort hervor, daß die Reihe (7.1) für $\varkappa=3$ divergiert, d. h. nicht summabel $\left(n,\frac{\varkappa-3}{2}\right)$ ist.

Es sei nunmehr $\varkappa\geqq 4$. Dann folgt aus (7.3) für $w>1$

$$S_{\varkappa_1}(w)=w^{-\varkappa_1}\sum_{1\leqq n\leqq w}P(\log n)\frac{\cos(\alpha\sqrt[\varkappa]{n}+\beta)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}}(w-n)^{\varkappa_1}=\varkappa_1 w^{-\varkappa_1}\int_0^w S(u)(w-u)^{\varkappa_1-1}$$

$$=\varkappa\varkappa_1 w^{-\varkappa_1}\int_0^w(w-u)^{\varkappa_1-1}du\int_1^{\sqrt[\varkappa]{u}}P(\varkappa\log v)\cos(\alpha v+\beta)v^{\varkappa_1}dv+\beta_2+o(1)$$

$$=\varkappa\varkappa_1 w^{-\varkappa_1}\int_0^w(w-u)^{\varkappa_1-1}du\int_0^{\sqrt[\varkappa]{u}}P(\varkappa\log v)\cos(\alpha v+\beta)v^{\varkappa_1}dv+\beta_3+o(1)$$

$$=\varkappa\varkappa_1 w^{-\varkappa_1}\int_0^{\sqrt[\varkappa]{w}}P(\varkappa\log v)\cos(\alpha v+\beta)v^{\varkappa_1}dv\int_{v^\varkappa}^w(w-u)^{\varkappa_1-1}du+\beta_3+o(1)$$

$$=\varkappa w^{-\varkappa_1}\int_0^{\sqrt[\varkappa]{w}}\cos(\alpha v+\beta)P(\varkappa\log v)v^{\varkappa_1}(w-v^\varkappa)^{\varkappa_1}dv+\beta_3+o(1)$$

$$=\varkappa w^{-\varkappa_1}\int_1^{\sqrt[\varkappa]{w}}+\varkappa\int_0^1\cos(\alpha v+\beta)P(\varkappa\log v)v^{\varkappa_1}dv+o(1)+\beta_3+o(1)$$

$$(7.41)\quad=\varkappa w^{-\varkappa_1}\int_1^{\sqrt[\varkappa]{w}}\cos(\alpha v+\beta)P(\varkappa\log v)v^{\varkappa_1}(w-v^\varkappa)^{\varkappa_1}dv+\beta_4+o(1)$$

$$(7.42)\quad=J+\beta_4+o(1),$$

zur Abkürzung. Ich unterscheide nunmehr zwei Fälle:

1. $\varkappa$ *ungerade.* Wendet man auf J eine $(\varkappa_1+1)$-fache partielle ntegration an und schätzt das Restintegral durch mehrfache Anwendung es zweiten Mittelwertsatzes ab, so folgt aus (7.41) und (7.42)

$$J = \alpha_1 w^{-\varkappa_1}\Big[\cos(\alpha v+\beta_5)\Big(\frac{d}{dv}\Big)^{\varkappa_1}\{P(\varkappa\log v)\,v^{\varkappa_1}(w-v^\varkappa)^{\varkappa_1}\}\Big]_{v=1}^{\sqrt[\varkappa]{w}}$$

$$+\beta_6 w^{-\varkappa_1}\int_1^{\sqrt[\varkappa]{w}}\cos(\alpha v+\beta_5)\Big(\frac{d}{dv}\Big)^{\varkappa_1+1}\{P(\varkappa\log v)\,v^{\varkappa_1}(w-v^\varkappa)^{\varkappa_1}\}\,dv+\beta_7+o(1)$$

$$=\alpha_2\cos(\alpha\sqrt[\varkappa]{w}+\beta_5)\,P(\log w)+\beta_8+o(1)+O\Big(w^{-\varkappa_1}\log^h w\cdot w^{\varkappa_1-\frac{1}{\varkappa}}\Big)$$

$$=\alpha_2\cos(\alpha\sqrt[\varkappa]{w}+\beta_5)\,P(\log w)+\beta_8+o(1).$$

us (7.42) und (7.43) folgt

$$S_{\varkappa_1}(w)=\alpha_2\cos(\alpha\sqrt[\varkappa]{w}+\beta_5)\,P(\log w)+\beta_9+o(1).$$

ufolge der Definition (5.1) kann also die Reihe (7.1) nicht $\Big(n,\frac{\varkappa-3}{2}\Big)$ ummabel sein.

2. $\varkappa$ *gerade.* Hier werde auf J eine $\Big(\varkappa_1+\frac{1}{2}\Big)$-fache partielle Inte- ration angewandt. Es folgt

$$J=\alpha_3 w^{-\varkappa_1}\int_1^{\sqrt[\varkappa]{w}}\cos(\alpha v+\beta_{10})\,P(\varkappa\log v)\,v^{\varkappa\varkappa_1+\frac{\varkappa}{2}-\frac{1}{2}}(w-v^\varkappa)^{-\frac{1}{2}}\,dv$$

$$+w^{-\varkappa_1}\int_1^{\sqrt[\varkappa]{w}}\cos(\alpha v+\beta_{10})\,Q(\log v)\,v^{-\frac{1}{2}}(w-v^\varkappa)^{\varkappa_1}\,dv$$

$$+w^{-\varkappa_1}\int_1^{\sqrt[\varkappa]{w}}\cos(\alpha v+\beta_{10})f(v,w)\,dv+\beta_{11}+o(1)=J_1+J_2+J_3+\beta_{11}+o(1).$$

ierbei ist $Q(\log v)$ ein Polynom vom Grade $\leqq h$; $f(v,w)$ ist die Summe iner nur von $\varkappa$ abhängigen Anzahl von Ausdrücken, deren jeder die orm hat: Polynom in $\log v$ vom Grade $\leqq h \times v^{\frac{1}{2}}(w-v^\varkappa)^{\frac{1}{2}} \times$ einem olynom in v und w, das in $v^\varkappa$ und w homogen von der Dimension $_1-\frac{1}{2}-\frac{1}{\varkappa}$ ist.

Eine Zerlegung von J_2 in zwei Bestandteile nebst Abschätzung des estes nach dem zweiten Mittelwertsatze ergibt

$$J_2=\int_1^{\sqrt[\varkappa]{w}}\cos(\alpha v+\beta_{10})\,Q(\log v)\,v^{-\frac{1}{2}}\,dv+O\Big(w^{-\varkappa_1}\log^h w\cdot w^{\varkappa_1-\frac{1}{2\varkappa}}\Big)$$

7.46) $\qquad=\beta_{12}+o(1).$

Andererseits liefert eine Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes auf J_3

$$J_3 = O\left(w^{-\varkappa_1}\log^h w \cdot w^{\frac{1}{2\varkappa}+\frac{1}{2}+\varkappa_1-\frac{1}{2}-\frac{1}{\varkappa}}\right) = o(1). \tag{7.47}$$

Aus (7.44) und (7.45) folgt

$$J_1 = \alpha_3 P(\log w) w^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}} \int_1^{\sqrt[\varkappa]{w}} \cos(\alpha v+\beta_{10})(w-v^\varkappa)^{-\frac{1}{2}}\,dv \tag{7.48}$$

$$+\alpha_3 w^{-\varkappa_1}\int_1^{\sqrt[\varkappa]{w}} \cos(\alpha v+\beta_{10})\frac{P(\varkappa\log v)v^{\varkappa\varkappa_1+\frac{\varkappa}{2}-\frac{1}{2}} - P(\log w)w^{\varkappa_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}}{w-v^\varkappa}(w-v^\varkappa)^{\frac{1}{2}}\,dv$$

$$= J_4 + J_5. \tag{7.49}$$

Für J_5 ergibt sich nach dem zweiten Mittelwertsatze

$$J_5 = O\left(w^{-\varkappa_1}\log^h w \cdot w^{\varkappa_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}-1+\frac{1}{2}}\right) = o(1). \tag{7.50}$$

(7.48) und (7.49) liefern ferner

$$J_4 = \alpha_3 P(\log w) w^{\frac{1}{2\varkappa}} \int_{\frac{1}{\sqrt[\varkappa]{w}}}^1 \cos(\alpha\sqrt[\varkappa]{w}\,u+\beta_{10})\varkappa^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\,du \tag{7.51}$$

$$+\alpha_3 P(\log w) w^{\frac{1}{2\varkappa}}\int_{\frac{1}{\sqrt[\varkappa]{w}}}^1 \cos(\alpha\sqrt[\varkappa]{w}\,u+\beta_{10})\{(1-u^\varkappa)^{-\frac{1}{2}} - \varkappa^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\}\,du$$

$$= J_6 + J_7. \tag{7.52}$$

J_7 wird einmal partiell integriert und das Restintegral primitiv abgeschätzt:

$$J_7 = O\left(\log^h w \cdot w^{\frac{1}{2\varkappa}-\frac{1}{\varkappa}}\right) = o(1). \tag{7.53}$$

Endlich folgt aus (7.51) und (7.52)

$$J_6 = \alpha_4 P(\log w) w^{\frac{1}{2\varkappa}} \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt[\varkappa]{w}}} \cos(\alpha\sqrt[\varkappa]{w}+\beta_{10}-\alpha\sqrt[\varkappa]{w}\,u)\frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= \alpha_4 P(\log w)\left\{\cos(\alpha\sqrt[\varkappa]{w}+\beta_{10})\int_0^{\sqrt[\varkappa]{w}-1}\frac{\cos\alpha u}{\sqrt{u}}\,du\right.$$

$$\left.+\sin(\alpha\sqrt[\varkappa]{w}+\beta_{10})\int_0^{\sqrt[\varkappa]{w}-1}\frac{\sin\alpha u}{\sqrt{u}}\,du\right\}$$

$$= \alpha_5\cos(\alpha\sqrt[\varkappa]{w}+\beta_{13})P(\log w)+o(1). \tag{7.54}$$

aus (7.45), (7.46), (7.47), (7.49), (7.50), (7.52), (7.53) und (7.54) folgt

$$J = \alpha_5 \cos(\alpha \sqrt[\varkappa]{w} + \beta_{13})\, P(\log w) + \beta_{14} + o(1),$$

d. h. auch in diesem Falle ist die Reihe (7.1) nicht $\left(n, \frac{\varkappa-3}{2}\right)$ summabel.

8. Hilfssatz 7. *Es sei $R(x)$ nach (1.3) definiert und $P(y)$ dasjenige reelle Polynom genau $(m-1)$-ten Grades, welches für jedes $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{n \leqq x} P(\log n) = R(x) + O(x^{\varepsilon})$$

erfüllt. Dann ist für $\varkappa \geqq 3$ und festes ganzes $q \geqq 1$

$$\sum_{1 \leqq n < w^{\varkappa}} \left(\frac{F(n) - P(\log n)}{n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varkappa}}} e^{-2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nq}{D}}\, i} - e^{(\varrho_1 - 1)\frac{\pi i}{4}} \varkappa^{-\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2\varkappa}} \frac{F(q)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa}} \right) e^{\sqrt[\varkappa]{n}} (w - \sqrt[\varkappa]{n})^{\frac{\varkappa-3}{2}} = o\left(e^w w^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right) \tag{8.1}$$

und für $\varkappa \geqq 3$ und festes $s_1 = 1 + ti$

$$\sum_{1 \leqq n < w^{\varkappa}} \frac{F(n) - P(\log n)}{n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varkappa}}} e^{\sqrt[\varkappa]{n}\, s_1} (w - \sqrt[\varkappa]{n})^{\frac{\varkappa-3}{2}} = o\left(e^w w^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right). \tag{8.2}$$

Beweis. Wegen

$$\sum_{1 \leqq n < w^{\varkappa}} \frac{e^{\sqrt[\varkappa]{n}}}{n} (w - \sqrt[\varkappa]{n})^{\frac{\varkappa-3}{2}} \leqq w^{\frac{\varkappa-3}{2}} \sum_{n < w^{\varkappa}} \frac{e^{\sqrt[\varkappa]{n}}}{n} = O\left(w^{\frac{\varkappa-3}{2}} \int_1^{w^{\varkappa}} \frac{e^{\sqrt[\varkappa]{u}}}{u}\, du\right)$$

$$= O\left(w^{\frac{\varkappa-3}{2}} \int_1^{w} e^v \frac{dv}{v}\right) = o\left(e^w w^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right)$$

genügt es, die Behauptung (8.2) zu beweisen; hierzu reicht aber [20]), der Nachweis von

$$T(w) = \sum_{1 \leqq n < w^{\varkappa}} \frac{F(n) - P(\log n)}{n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varkappa}}} e^{\sqrt[\varkappa]{n}} (w - \sqrt[\varkappa]{n})^{\frac{\varkappa-3}{2}} = o\left(e^w w^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right). \tag{8.3}$$

Aus einem allgemeinen O-Satz von Landau [21]) folgt

$$S(x) = \sum_{1 \leqq n \leqq x} (F(n) - P(\log n)) = O\left(x^{1 - \frac{2}{\varkappa+1} + \varepsilon}\right) = o\left(x^{1 - \frac{1}{\varkappa}}\right). \tag{8.31}$$

[20]) Vgl. den Hilfssatz meiner in Fußnote [18]) genannten Abhandlung.

[21]) E. Landau, „Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen (Zweite Abhandlung)“ [Göttinger Nachrichten 1915, S. 209–243].

Für ganzes $n \geqq 1$ ist ferner

$$(8.32)\quad |d_n| = \left| \frac{e^{\sqrt[\varkappa]{n}}}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} - \frac{e^{\sqrt[\varkappa]{n+1}}}{(n+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} \right|$$

$$= \left| \int_n^{n+1} \left\{ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}\right) \frac{e^{\sqrt[\varkappa]{u}}}{u^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} - \frac{1}{\varkappa} \frac{e^{\sqrt[\varkappa]{u}}}{u^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} \right\} du \right| \leqq \int_n^{n+1} \frac{e^{\sqrt[\varkappa]{u}}}{u^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} du.$$

Ich nehme jetzt $v > 1$ und verstehe unter V die größte ganze Zahl unter $v^\varkappa$. Dann folgt aus (8.31) und (8.32)

$$(8.33)\quad \sum_{n=1}^{V} S(n) d_n | \leqq \sum_{n=1}^{V} o\left(n^{1-\frac{1}{\varkappa}}\right) \int_n^{n+1} \frac{e^{\sqrt[\varkappa]{u}}}{u^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} du = o \int_1^{V+1} \frac{e^{\sqrt[\varkappa]{u}}}{u^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} du$$

$$= o \int_1^{\sqrt[\varkappa]{V+1}} e^v u^{\frac{\varkappa-3}{2}} du = o\left(e^v v^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right)$$

und

$$(8.34)\quad S(V) \frac{e^{\sqrt[\varkappa]{V+1}}}{(V+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} = o\left(v^{\varkappa-1} \frac{e^{\sqrt[\varkappa]{v^\varkappa+1}}}{v^{\frac{\varkappa}{2}+\frac{1}{2}}}\right) = o\left(e^v v^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right).$$

(8.33) und (8.34) ergeben weiter

$$(8.35)\quad T_0(v) = \sum_{1 \leqq n < v^\varkappa} \frac{F(n) - P(\log n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} e^{\sqrt[\varkappa]{n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{V} S(n) d_n + S(V) \frac{e^{\sqrt[\varkappa]{V+1}}}{(V+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} = o\left(e^v v^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right),$$

womit zugleich (8.3) für $\varkappa = 3$ bewiesen ist. Für $\varkappa > 3$ folgt aber aus (8.35)

$$T(w) = \frac{\varkappa-3}{2} \int_0^w T_0(v)(w-v)^{\frac{\varkappa-5}{2}} dv = o \int_0^w e^v v^{\frac{\varkappa-3}{2}} (w-v)^{\frac{\varkappa-5}{2}} dv$$

$$= o\left(e^w w^{\frac{\varkappa-3}{2}} \int_0^\infty e^{-v} v^{\frac{\varkappa-5}{2}} dv\right) = o\left(e^w w^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right),$$

womit (8.3) allgemein bewiesen ist.

9. Beweis des Hauptsatzes. Für $\varkappa = 1$ ist $F(x) = 1$ für ganze x und sonst $F(x) = 0$; ferner wird dann

$$J_{\varrho_1,\varrho_2}(w) = J_{1,0}(w) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{w} \sin w,$$

o daß sich der Hauptsatz auf die wohlbekannte Identität

$$x - [x] - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}$$

eduziert. Es darf also von jetzt ab $\varkappa \geqq 2$ angenommen werden.

Ich setze $\mu = \left[\frac{\varkappa}{2}\right] + 2$ und

9.1) $R_\mu(x) =$ Residuensumme von $\frac{x^{s+\mu}}{s \ldots (s+\mu)} Z(s)$ für $s = 0$ und $s = 1$.

Dann ist nach Landau[22]) für $x > 0$

9.11) $$\frac{1}{\mu!} \sum_{1 \leqq n \leqq x} F(n)(x-n)^\mu$$

$$= R_\mu(x) + A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty} G(s) \left(\frac{n}{A^2}\right)^s \frac{x^{s+\mu}}{s \ldots (s+\mu)} ds,$$

wobei die rechts auftretende Reihe auf jeder endlichen Strecke

9.12) $$0 < x_0 \leqq x \leqq x_1$$

absolut und gleichmäßig konvergiert. Die hier auftretenden Integrale lassen sich $\varkappa$-mal unter dem Integralzeichen differentiieren, und man erhält somit aus (1.3), (9.1) und (9.11) *formal* für nichtganze $x > 0$

$$H(x) = R(x) + Z(0) + A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty} G(s) \left(\frac{nx}{A^2}\right)^s \frac{ds}{s}.$$

Dies ist wegen (1.1) und (1.5) gleichbedeutend mit

$$H(x) = R(x) + Z(0) + A \sqrt[\varkappa]{\frac{x}{A^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{1-\frac{1}{\varkappa}}} J_{\varrho_1, \varrho_2}\left(2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right),$$

womit zugleich eine *formale* Begründung von (1.6) für nichtganze x gegeben ist.

Für gliedweise Differentiation summabler Reihen gilt folgendes Kriterium: *Es sei* $a < b$, $p \geqq 1$ *ganz*, $\alpha \geqq 0$ *beliebig.*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

für $a \leqq x \leqq b$ *summabel* (R, λ, α); *ferner ebendort* $\varphi_n^{(p)}(x)$ $(n \geqq 1)$ *stetig, und*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(p)}(x)$$

gleichmäßig (R, λ, α) *summabel.*

[22]) Vgl. die in der vorigen Fußnote genannte Abhandlung S. 225, Formel (47) (die gegenüber (9.11) eine unwesentliche Verschiebung des Integrationsweges aufweist).

Alsdann ist in diesem Intervall $g(x) = f^{(p)}(x)$.

Da die Rieszschen Mittelbildungen linear sind, so ist diese Regel eine unmittelbare Folge des gleichlautenden bekannten Satzes für konvergente Reihen[23]).

Nennt man nämlich die den Reihen f und g entsprechenden Rieszschen Partialsummen $F_\lambda^\alpha(w)$ und $G_\lambda^\alpha(w)$, so ist

$$F_\lambda^\alpha(w) = \sum_{\lambda_n < w} \varphi_n(x)\,(w-\lambda_n)^\alpha,$$

$$G_\lambda^\alpha(w) = \sum_{\lambda_n < w} \varphi_n^{(p)}(x)\,(w-\lambda_n)^\alpha = \left(\frac{d}{dx}\right)^p F_\lambda^\alpha(w).$$

Jetzt braucht man nur noch f und g in konvergente Reihen umzuordnen, z. B.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{F_\lambda^\alpha(\lambda_{n+1})}{\lambda_{n+1}^\alpha} - \frac{F_\lambda^\alpha(\lambda_n)}{\lambda_n^\alpha}\right), \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{G_\lambda^\alpha(\lambda_{n+1})}{\lambda_{n+1}^\alpha} - \frac{G_\lambda^\alpha(\lambda_n)}{\lambda_n^\alpha}\right),$$

und alle Voraussetzungen für gliedweise Differentiation konvergenter Reihen sind erfüllt.

Der Hauptsatz wird also bewiesen sein, wenn ich zeige:

1.1) *Für* $\varkappa = 2$ *ist Reihe* (1.6) *in jedem Intervall* $0 < x_0 \leqq x \leqq x_1$ *mit* $F(x) = 0$ *gleichmäßig konvergent*;

1.2) *diese Reihe konvergiert auch für jedes* x *mit* $F(x) \neq 0$ *und hat dann den durch* (1.6) *angegebenen Wert*;

2.1) *und* 2.2) *analoge Zergliederungen der Behauptung* 2) *des Hauptsatzes*;

Behauptung 3) *des Hauptsatzes unverändert.*

Für jedes Paar fester $\mathfrak{K}$, m ist

$$F(n) = F_{\mathfrak{K},m}(n) = O(n^\varepsilon). \tag{9.2}$$

Bezeichnet nämlich R den rationalen Körper, und ist — wie erinnerlich — k der Grad von $\mathfrak{K}$, so ist einerseits[24])

$$F_{R,m}(n) = O(n^\varepsilon),$$

andererseits[25])

$$F_{\mathfrak{K},1}(n) \leqq F_{R,k}(n),$$

und somit

$$F_{\mathfrak{K},1}(n) = O(n^\varepsilon),$$

---

[23]) E. Landau, „Über mehrfache gliedweise Differentiation unendlicher Reihen" [Archiv d. Math. u. Phys., Dritte Reihe, **26** (1917), S. 69—70].

[24]) E. Landau, „Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen" [Göttinger Nachrichten 1912, S. 687—771], S. 717, Hilfssatz 12.

[25]) E. Landau, „Abschätzungen von Charaktersummen, Einheiten und Klassenzahlen" [Göttinger Nachrichten 1918, S. 79—97], S. 89—90.

oraus wegen

$$F_{\mathfrak{K},m}(n) = \sum_{d_1 \dots d_m = n} F_{\mathfrak{K},1}(d_1) \dots F_{\mathfrak{K},1}(d_n)$$

e Behauptung (9.2) folgt.

Wendet man auf jedes einzelne Glied der Reihe (1.6) Hilfssatz 1 an nd beachtet den Wert (1.1) von A, so folgt für $g = \left[\frac{\varkappa+1}{2}\right]$, mit gewissen ellen $a_1, \dots, a_g$, $b_1, \dots, b_g$ *formal*[26])

$$) \qquad \mathsf{A}\sqrt[\varkappa]{\frac{x}{\mathsf{A}^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{1-\frac{1}{\varkappa}}} J_{\varrho_1,\varrho_2}\left(2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \varkappa^{-\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2\varkappa}} x^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} \cos\left\{2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}} + \frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi\right\}$$

$$x^{\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2\varkappa}}} \cos\left(2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right) + \dots + a_g x^{\frac{\varkappa-1-2g}{2\varkappa}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1+2g}{2\varkappa}}} \cos\left(2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right)$$

$$x^{\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2\varkappa}}} \sin\left(2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right) + \dots + b_g x^{\frac{\varkappa-1-2g}{2\varkappa}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1+2g}{2\varkappa}}} \sin\left(2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right)$$

$$\sum_{=1}^{\infty} O\left(n^{-1-\frac{1}{\varkappa}+\varepsilon}\right).$$

Der Exponent in der O-Reihe folgt aus (9.2) und

$$-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa} - \frac{1}{\varkappa}(g+1) < -\frac{\varkappa+1}{2\varkappa} - \frac{\varkappa+1}{2\varkappa} = -1 - \frac{1}{\varkappa}.$$

iese Reihe konvergiert im Intervall (9.12) absolut und gleichmäßig. ie erste Reihe rechts in (9.3) soll, nach dem Vorgang von Hardy[27]), e kritische heißen.

Aus der Linearität der Rieszschen Mittelbildungen folgt unmittelbar, aß $\Sigma(a_n \pm b_n)$ summabel (gleichmäßig) (R, λ, α) ist, wenn beide Reihen a_n und Σb_n die gleiche Eigenschaft haben, und daß somit $\Sigma(a_n + b_n)$ cht summabel (R, λ, α) ist, wenn genau eine der beiden Reihen die eiche Eigenschaft hat. Die Behauptungen 1.1), 1.2), 2.1), 2.2) und 3) ssen sich also in die folgenden zusammenfassen:

1.3) *Für* $\varkappa = 2$ *sind alle* $(2g+2)$ *Reihen rechts in* (9.3) *in jedem tervall* (9.12) *mit* $F(x) = 0$ *gleichmäßig konvergent*;

[26]) In der entsprechenden Formel (3.43), *Dissertation* S. 42, steht zweimal ver- ıentlich $\varkappa$ für $2\varkappa$.

[27]) Vgl. die in Fußnote [4]) genannte Abhandlung, S. 277.

1.4) *für x mit $F(x) \neq 0$ konvergieren sie alle und erfüllen in ihrer Gesamtheit* (1.6);

2.3) *für $\varkappa \geqq 3$ ist die kritische Reihe in jedem Intervall* (9.12) *mit $F(x) = 0$ bei festem $\varepsilon > 0$ gleichmäßig $\left(n, \frac{\varkappa-3}{2} + \varepsilon\right)$ summabel, die übrigen Reihen dort gleichmäßig $\left(n, \frac{\varkappa-3}{2}\right)$ summabel;*

2.4) *für x mit $F(x) \neq 0$ ist die kritische Reihe $\left(n, \frac{\varkappa-3}{2} + \varepsilon\right)$ summabel, die übrigen Reihen sind $\left(n, \frac{\varkappa-3}{2}\right)$ summabel, und* (1.6) *ist erfüllt;*

3.1) *für $\varkappa \geqq 3$ ist die kritische Reihe für kein $x > 0$ summabel $\left(n, \frac{\varkappa-3}{2}\right)$.*

Nunmehr gehöre x einem Intervall (9.12) mit $F(x) = 0$ an, d. h. es gebe ein Paar ganzer Zahlen q_0, q_1, daß den Bedingungen genügt

$$q_0 < x_0 \leqq x \leqq x_1 < q_1;$$

$q_0 = 0$, oder $F(q_0) \neq 0$; $F(q_1) \neq 0$; kein q mit $F(q) \neq 0$ erfüllt $q_0 < q < q_1$. Dann gehört,

$$t = 2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{x}{D}} \tag{9.41}$$

gesetzt, t einem Intervall $t_0 t_1$ von der Form

$$\gamma_{q_0} < t_0 \leqq t \leqq t_1 < \gamma_{q_1} \tag{9.42}$$

an, wo γ nach (4.11) definiert ist. Im Intervall (9.42) sind daher nach Hilfssatz 3 die $g+1$ Funktionen

$$e^{-\frac{1}{4}(q_1+1)\pi i}\,\Psi(s); \qquad (1 \leqq l \leqq g) \qquad \Psi_l(s),$$

$s = ti$ gesetzt, regulär. Auf die zugehörigen $g+1$ Dirichletschen Reihen d. h. auf die Reihen (4.1), von denen die $l = 0$ entsprechende mit dem konstanten Faktor $e^{-\frac{1}{4}(q_1+1)\pi i}$ zu multiplizieren ist, kann jetzt Hilfssatz 4 Bedingung (5.2), Fall II) angewandt werden. Wegen (9.2) ist der Koeffizient der ersten Reihe

$$O\left(n^{\frac{\varepsilon}{2\varkappa} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa}}\right) = o\left(n^{\frac{\frac{\varkappa-3}{2} + \varepsilon + 1 - \varkappa}{\varkappa}}\right), \tag{9.43}$$

der der übrigen g Reihen

$$O\left(n^{\frac{1}{2\varkappa} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2\varkappa}}\right) = o\left(n^{\frac{\frac{\varkappa-3}{2} + 1 - \varkappa}{\varkappa}}\right). \tag{9.44}$$

Für $\varkappa = 2$ sind also alle Reihen (4.1) in (9.42) gleichmäßig konvergent für $\varkappa \geqq 3$ und festes ε ebenda die erste gleichmäßig $\left(n, \frac{\varkappa-3}{2} + \varepsilon\right)$, die

brigen gleichmäßig $\left(n, \frac{\varkappa-3}{2}\right)$ summabel. All dies gilt gleicherweise für ie Real- und Imaginärteile der betreffenden Reihen. Damit sind, in Hinlick auf das höchst anständige Verhalten der O-Reihe in (9.3), die Beauptungen 1.3) und 2.3) erledigt.

Jetzt betrachte ich den Fall eines ganzzahligen $x = q$ mit $F(q) \neq 0$. Im die Summabilitätseigenschaften der Reihen rechts in (9.3) zu unterchen, sondere ich zuerst die kritische Reihe, welche hier ein von den brigen abweichendes Verhalten zeigt, ab.

Aus (4.12) und (6.2) folgt: die für $\sigma > 0$ reguläre Funktion

$$9.5) \qquad \Theta(s) = \Psi(s + \gamma i) - e^{\frac{1}{4}(\varrho_1 - 1)\pi i} \varkappa^{-\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2\varkappa}} \frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa}}} \varphi_{1,0}(s)$$

at um $s = 0$ die Form

$$9.51) \qquad \Theta(s) = g_q + O|s|^{\frac{1}{2}},$$

it konstantem g_q. Sie genügt also dort einer Lipschitzbedingung. uf die zugehörige Dirichletsche Reihe, vgl. (4.1) und (6.1),

$$9.52) \qquad (\sigma > 0)$$

$$\Theta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varkappa}}} e^{-2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nq}{D}} i} - e^{\frac{1}{4}(\varrho_1 - 1)\pi i} \varkappa^{-\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2\varkappa}} \frac{F(q)}{n q^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa}}} \right\} e^{-\sqrt[\varkappa]{n}s}$$

st daher, wegen (9.43) und

$$\frac{1}{n} = o\left(n^{\frac{\frac{\varkappa-3}{2} + 1 - \varkappa}{\varkappa}}\right),$$

ilfssatz 4, Bedingung (5.2) (mit denselben α), Fall I) anwendbar. Dasselbe trifft also auch für die Reihe

$$9.53) \qquad \Re\left(e^{-\frac{1}{4}(\varrho_1 + 1)\pi i} \Theta(s)\right)_{s=0}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varkappa}}} \cos\left\{2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nq}{D}} + \frac{1}{4}(\varrho_1 + 1)\pi\right\} = \Sigma_q,$$

. h. für die kritische Reihe, zu. Diese ist demnach im vorliegenden Falle ummabel $(n, 0)$ oder $\left(n, \frac{\varkappa-3}{2} + \varepsilon\right)$, je nachdem $\varkappa = 2$ oder $\varkappa \geqq 3$.

Ich greife jetzt auf die Reihe zurück, deren Realteil in (9.53) genommen wird. Diese ist im Punkte $s = 0$, wie aus dem Beweise von ilfssatz 4 ersichtlich ist, ebenfalls $(R, \sqrt[\varkappa]{n}, \alpha)$, oder — wie man zu sagen flegt — nach typischen Mitteln erster Art summabel. Eine für $= 0$ nach solchen Mitteln summable Dirichletsche Reihe ist aber nach

rechts, d. h. bei Annäherung $s \to 0^+$, stetig[28]). Dasselbe läßt sich demnach über ihren Realteil aussagen.

Mit anderen Worten: Es ist

$$\begin{aligned}\Sigma_q &= \lim_{\sigma=0^+} \Re\{e^{-\frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi i}\,\Theta(s)\}\\ &= \lim_{\sigma=0^+} \Re\left\{e^{-\frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}}\,e^{-\left(\sigma+2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{q}{D}}\,i\right)\sqrt[\varkappa]{n}}\right\}\\ &= \lim_{\sigma=0^+} \Re\{e^{-\frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi i}\,\Psi(\sigma+\gamma i)\},\end{aligned}$$

also nach (4.12), wenn noch

$$\Re\{e^{-\frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi i}e_q\} = h_q \tag{9.54}$$

gesetzt wird,

$$\Sigma_q = -\varkappa^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2\varkappa}} \frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} \lim_{\sigma=0^+} \Re(-i\log\sigma) + h_q = h_q. \tag{9.55}$$

Nunmehr wähle ich ein $t_0 > 0$, so daß für $0 < |t| \leqq t_0$ die Funktion $\Psi(\gamma i + ti)$ regulär ist und (4.12) mit $s+\gamma i$ für s gilt. Dann wird

$$e^{-\frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi i}\Psi(\gamma i+ti) = i\varkappa^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2\varkappa}} \frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}}\log(ti) + e^{-\frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi i}e_q + O|t|^{\frac{1}{2}},$$

d. h. nach (9.54)

$$\begin{aligned}\Sigma_{q,t} &= \Re\{e^{-\frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi i}\,\Psi(\gamma i+ti)\}\\ &= \varkappa^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2\varkappa}} \frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}}\Re(i\log ti) + h_q + O|t|^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{9.56}$$

Infolge der Festsetzung über den Logarithmus ist

$$\lim_{t=0^+}\Re(i\log ti) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{t=0^-}\Re(i\log ti) = \frac{\pi}{2}.$$

Es wird somit, wenn man noch (9.55) hinzuzieht,

$$\lim_{t=0^+}\frac{1}{2}(\Sigma_{q,t}+\Sigma_{q,-t}) = h_q = \Sigma_q,$$

$$\lim_{t=0^+}(\Sigma_{q,t}-\Sigma_{q,-t}) = -\pi\varkappa^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2\varkappa}} \frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}}. \tag{9.57}$$

Mit anderen Worten: die kritische Reihe macht an der Stelle $x = q$ ($F(q) \neq 0$

[28]) Hardy-Riesz, S. 39, Theorem 23.

nen Sprung von der Höhe der rechten Seite von (9.57) und nimmt ort den Mittelwert an.

Wegen

$$-\frac{1}{\pi}\varkappa^{-\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2\varkappa}}q^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\cdot(-\pi)\varkappa^{\frac{1}{2}}D^{-\frac{1}{2\varkappa}}\frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}}=F(q)$$

ßt dies sich auch so ausdrücken: *der erste Bestandteil der rechten Seite* on (9.3) *macht an der Stelle* $x=q$ $(F(q)\neq 0)$ *einen Sprung von der öhe* $F(q)$.

Die Untersuchung der nächsten $2g$ Bestandteile rechts in (9.3) für $=q$ $(F(q)\neq 0)$, d. h. der g Reihen $\Psi_l(s)$ $(1\leqq l\leqq g)$ für $s=\gamma i$ gealtet sich wesentlich einfacher, da ja nach (4.13) um $s=0$

$$(1\leqq l\leqq g)\qquad \Psi_l(s+\gamma i)=f_{l,q}+O|s|^{\frac{1}{2}},$$

.58) so dort eine Lipschitzbedingung erfüllt ist, ohne daß man erst eine ilfsfunktion einführen muß. Die Anwendung von Hilfssatz 4, Bedingung 5.2) (die zufolge (9.44) mit $\alpha=\frac{\varkappa-3}{2}$ erfüllt ist), Fall I) ist also direkt uf die Reihen (9.58) gestattet und ergibt somit ihre Summabilität $\left(\alpha,\frac{\varkappa-3}{2}\right)$ für $s=0$, d. h. die entsprechende Summabilität der bezüglichen estandteile von (9.3) für $x=q$ $(F(q)\neq 0)$.

Ferner ergibt das eben für Ψ angewandte Verfahren — ich begnüge ich damit, die Analoga zu (9.55) und (9.56) in leicht verständlicher otation aufzuschreiben:

$$(1\leqq l\leqq g)\qquad \Sigma_{l,q}=\mathop{\Re}_{\Im}(f_{l,q}),\qquad \Sigma_{l,q,t}=\mathop{\Re}_{\Im}(f_{l,q})+O|t|^{\frac{1}{2}}$$

— daß die eben erwähnten Bestandteile von (9.3) *an der Stelle* $=q$ $(F(q)\neq 0)$ *den Sprung Null machen und dort den Mittelwert anehmen, d. h. stetig sind.*

Zusammenfassend kann jetzt also gesagt werden: *die linke Seite* on (9.3) *macht für* $x=q$ $(F(q)\neq 0)$ *einen Sprung von der Höhe* $F(q)$ *nd nimmt dort den Mittelwert an.*

Da dieses Verhalten in (1.6) durch das Zusatzglied $-\frac{1}{2}F(x)$ komensiert wird, so sind mithin die Behauptungen 1.4) und 2.4) bewiesen. s bleibt noch 3.1).

Ich schreibe die kritische Reihe in der Form

$$(9.6)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} \cos\left\{2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}} + \frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)-P(\log n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} \cos\left\{2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}} + \frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi\right\}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(\log n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} \cos\left\{2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}} + \frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi\right\} = S_1 + S_2,$$

wo P das Polynom von Hilfssatz 7 ist. Nach Hilfssatz 6 ist die Reihe S_2 für kein $x > 0$ summabel $\left(n, \frac{\varkappa-3}{2}\right)$. Ich kann daher die Behauptung 3.1) durch die folgende ersetzen[29]):

3.2) *Die durch* (9.6) *gegebene Reihe* S_1 *ist für jedes* $x > 0$ *summabel* $\left(n, \frac{\varkappa-3}{2}\right)$.

Ist zunächst $F(x) = 0$, liegt also das nach (9.41) zugehörige t in einem Intervall $t_0 t_1$ von der Form (9.42), so wird nach den Hilfssätzen 3 und 5 $\left(a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\varkappa};\ b = 0, 1, \ldots, m-1\right)$ die Funktion

$$e^{-\frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi i}\left(\Psi(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(\log n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} e^{-\sqrt[\varkappa]{n}s}\right)$$

im Punkte $s = ti$ regulär; auf den Realteil der zugehörigen Dirichletschen Reihe, und somit auf die Reihe S_1, ist daher Hilfssatz 4, Fall II) anwendbar, da Bedingung (5.3) wegen (8.2) mit $\alpha = \frac{\varkappa-3}{2}$ erfüllt ist.

Ist aber $x = q$, $F(q) \neq 0$, so folgt aus Hilfssatz 5, (9.51) und (9.52), daß die Dirichletsche Reihe

$$(\sigma > 0)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{F(n)-P(\log n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} e^{-2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nq}{D}} i} - e^{\frac{1}{4}(\varrho_1-1)\pi i}\, \varkappa^{-\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2\varkappa}} \frac{F(q)}{n q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}}\right\} e^{-\sqrt[\varkappa]{}}$$

um $s = 0$ eine Bedingung von der Form (9.51) erfüllt. Sie ist daher nach Hilfssatz 4, Fall I), da Bedingung (5.3) wegen (8.1) mit $\alpha = \frac{\varkappa-3}{2}$ erfüllt ist, für $s = 0$ summabel $\left(n, \frac{\varkappa-3}{2}\right)$ — daher auch die Reihe S_1 für $x = q$, $F(q) \neq 0$.

Damit ist auch die Behauptung 3.2) bewiesen.

[29]) Vgl. die Bemerkungen S. 177.

10. Es sollen jetzt die bereits bekannten Spezialfälle des Hauptsatzes skutiert werden. Diese zerfallen in zwei Gruppen, je nachdem I) $m = 1$, er II) $\mathfrak{K}$ der rationale Körper ist. Der Schnittpunkt dieser beiden uppen, nämlich der Fall $\varkappa = 1$, ist — wie bereits erwähnt — trivial.

Sofern in den betreffenden Abhandlungen für die diesbezüglichen ihen gleichmäßige Konvergenz oder Summabilität nachgewiesen wird, schieht dies stets für ein Intervall von der Form

$$g < x_0 \leqq x \leqq x_1 < g + 1 \qquad (g \geqq 0 \text{ ganz}),$$

lches in gewissen Fällen enger ist, als das im Hauptsatz betrachtete.

I. Gruppe: Idealfunktion.

Es sei $\mathfrak{K}$ zunächst ein *imaginärquadratischer* Körper. Dann lautet e entsprechend spezialisierte Formel (1.6),

$$(10.1) \quad H(x) - \frac{1}{2} F(x) = h\lambda x + \zeta_{\mathfrak{K}}(0) + \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{F(n)}{\sqrt{n}} J_1\left(4\pi\sqrt{\frac{nx}{-\Delta}}\right),$$

J_1 die Besselsche Funktion erster Art ist[30]) und $h\lambda$, von jetzt ab uernd, das Residuum von $\zeta_{\mathfrak{K}}(s)$ für $s = 1$ bezeichnet. Hier ist noch sbesondere, wenn $\left(\frac{\Delta}{n}\right)$ das Kroneckersche Symbol bedeutet[31]),

$$(10.11) \qquad h\lambda = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\Delta}{n}\right)\frac{1}{n}, \qquad \zeta_{\mathfrak{K}}(0) = -\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\Delta}{n}\right)\frac{1}{n},$$

$$F(n) = \sum_{d \mid n}{}' \left(\frac{\Delta}{d}\right).$$

eziell für den Gaußschen Körper $\mathfrak{K}(i)$ folgt aus (10.1) und (10.11), dem man $\Delta = -4$ setzt und $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\Delta}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}$ beachtet,

$$(10.2) \quad H(x) - \frac{1}{2} F(x) = \frac{\pi}{4} x - \frac{1}{4} + \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{F(n)}{\sqrt{n}} J_1(2\pi\sqrt{nx}).$$

(10.1) wurde 1904 von G. Voronoï[32]) formal abgeleitet und zuerst n G. H. Hardy in der in Fußnote [4]) genannten Abhandlung bewiesen.

---

[30]) Die Auswertung $J_{0,1}(w) = J_1(w)$ folgt sofort aus (1.5) und (2.3).

[31]) Vgl. die Funktionalgleichung (4.43), ferner H. Weber, „Lehrbuch der gebra", III. Band [Braunschweig 1908], S. 345, Abt. 4, S. 407, Formel (8).

[32]) G. Voronoï, „Sur le développement, à l'aide des fonctions cylindriques, des mmes doubles $\Sigma f(pm^2 + 2qmn + rn^2)$, où $pm^2 + 2qmn + rn^2$ est une forme sitive à coefficients entiers" [Verhandlungen des dritten internationalen Mathe- tiker-Kongresses Heidelberg 1904, Leipzig, B. G. Teubner 1905, S. 241—245].

Die von Hardy angewandte Methode ist für meine Dissertation und auch für die vorliegende Abhandlung maßgebend gewesen. Einen verhältnismäßig einfachen Beweis von (10.2) gab E. Landau[33]). Landau verwendet hierzu die von ihm ausgebaute Pfeiffersche Methode, die nur von den Hilfsmitteln der reellen Analysis Gebrauch macht. Neuerdings haben G. H. Hardy und E. Landau[34]) zwei weitere Beweise für (10.2) gegeben. Der eine arbeitet mit komplexen Hilfsmitteln, vermeidet aber den Rieszschen Satz und die daran anschließenden langwierigen Entwickelungen, so daß das Ziel rasch erreicht wird. Der zweite Beweis verläuft im Reellen und ist außerordentlich kurz und durchsichtig.

Voronoï, Hardy und Landau betrachten übrigens nicht den imaginärquadratischen Körper direkt, sondern das gleichwertige Problem der Darstellung von Zahlen durch positiv definite binäre quadratische Formen mit ganzzahligen Koeffizienten.

Wegen $\varkappa = 2$ sind die Reihen (10.1) und (10.2) konvergent.

Nunmehr sei $\mathfrak{K}$ ein *reellquadratischer* Körper. (1.6) bedeutet hier[35])

$$(10.3) \qquad H(x) - \frac{1}{2} F(x)$$

$$= h\lambda x + \vartheta x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{\sqrt{n}} \left\{ Y_1\left(4\pi \sqrt{\frac{nx}{\Delta}}\right) - H_1\left(4\pi \sqrt{\frac{nx}{\Delta}}\right) \right\}.$$

Hier wird $\zeta_{\mathfrak{K}}(0) = 0$.[36]) Y_1 ist die Besselsche Funktion zweiter Art, während

$$(10.31) \qquad H_1(y) = i\, Y_1(iy) - J_1(iy).$$

$H_1(y)$ ist übrigens für $y > 0$ reell und wird dort durch das Integral

$$(10.32) \qquad H_1(y) = \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-uy} u\, du}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

dargestellt. Um einen Zusammenhang zwischen (10.31) und (10.32) herzustellen, beachte man, daß für $y > 0$

$$\frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-uy}\, du}{\sqrt{u^2 - 1}} = Y_0(iy) + i J_0(iy),$$ [37])

---

[33]) E. Landau, „Über die Gitterpunkte in einem Kreise. Dritte Mitteilung." [Göttinger Nachrichten 1920, S. 109—134.]

[34]) G. H. Hardy und E. Landau, „The Lattice Points of a Circle" [Proceedings of the Royal Society, A **105** (1924), S. 244—258].

[35]) *Dissertation*, S. 36.

[36]) $\zeta_{\mathfrak{K}}(0)$ ist nur für den rationalen und den imaginärquadratischen Körper von Null verschieden. Vgl. „Ideale", S. 75, Abt. 3.

[37]) Vgl. P. Schafheitlin, „Die Theorie der Besselschen Funktionen" [Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1908, 129 S.], S. 105.

oraus durch Differentiation nach y (links unter dem Integralzeichen) egen

$$J_0'(y) = -J_1(y), \qquad Y_0'(y) = -Y_1(y)\ ^{38})$$

10.31) folgt.

Zur Verifikation von (10.3) braucht nur

10.33) $$J_{2,0}(w) = Y_1(w) - H_1(w)$$

achgewiesen zu werden.

Nach (1.5), der Definition von τ und der Beziehung

$$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)} = \pi \frac{4^{s-1}}{\cos^2\frac{\pi s}{2}\,\Gamma^2(s)},$$

elche sich aus bekannten Eigenschaften der Gammafunktion ergibt, ist

$$(w>0) \qquad J_{2,0}(w) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty} \frac{1}{s\cos^2\frac{\pi s}{2}\,\Gamma^2(s)}\left(\frac{w}{2}\right)^{2s-1} ds.$$

ierin kann ich den Integrationsweg beliebig weit nach rechts verschieben; enn bei festem $\sigma_1 > \frac{3}{4}$ ist der Integrand im Streifen $\frac{3}{4} \leqq \sigma \leqq \sigma_1$ gleichäßig

$$O\left(|t|^{-1} e^{-\pi|t|} e^{\pi|t|} |t|^{-2\cdot\frac{3}{4}+1}\right) = O\left(|t|^{-\frac{3}{2}}\right)\ ^{39}).$$

wischendurch ist der Integrand regulär, bis auf die Stellen $s = 1, 3, 5, \ldots$, o Pole zweiter Ordnung vorliegen. Bezeichnet man die betreffenden esidua mit $R_0, R_1, R_2, \ldots$, so wird demnach

10.34) $$(n \geqq 1) \qquad J_{2,0}(w) = -\frac{\pi}{2}\sum_{q=0}^{n-1} R_q + \frac{\pi}{2} J_n,$$

$$J_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{2n-i\infty}^{2n+i\infty} \frac{1}{s\cos^2\frac{\pi s}{2}\,\Gamma^2(s)}\left(\frac{w}{2}\right)^{2s-1} ds.$$

ür $n \geqq 2$ ist

$$|\Gamma^2(2n+it)| = |(2n-1+it)|\ldots|(2+it)|^2\,|\Gamma^2(2+it)|$$
$$\geqq \Gamma^2(2n)\,|\Gamma^2(2+it)|,$$

---

38) Schafheitlin, l. c. S. 123, 4 (1a); S. 124, 13. (3), (4).

39) Vgl. „Ideale", S. 80, (131) und S. 82, (135).

also für $n \to \infty$

$$|J_n| < \frac{w^{4n-1}}{\Gamma^2(2n)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left|\cos^2 \frac{\pi}{2}(2n+it)\,\Gamma^2(2+it)\right|}$$

$$= \frac{w^{4n-1}}{\Gamma^2(2n)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left|\cos^2 \frac{\pi}{2} it\,\Gamma^2(2+it)\right|} \to 0.$$

Aus (10.34) folgt jetzt

$$(10.35) \qquad (w > 0) \qquad J_{2,0}(w) = -\frac{\pi}{2} \sum_{q=0}^{\infty} R_q.$$

In der Umgebung von $s = 2q+1$ ($q \geqq 0$ ganz) ist

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi s}{2}} = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{(s-2q-1)^2} + c_{q,0} + c_{q,2}(s-2q-1)^2 + \ldots,$$

d. h. es wird

$$(q \geqq 0) \qquad R_q = \frac{4}{\pi^2} f'(2q+1), \qquad f(s) = \frac{1}{s\,\Gamma^2(s)} \left(\frac{w}{2}\right)^{2s-1}$$

und somit nach (10.35), da die einzelnen Reihen absolut konvergieren,

$$(10.36) \qquad J_{2,0}(w) = -\frac{4}{\pi} \log \frac{w}{2} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(2q+1)\,\Gamma(2q+2)} \left(\frac{w}{2}\right)^{4q+1}$$

$$+ \left(\frac{2}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma^2(2q+2)} \left(\frac{w}{2}\right)^{4q+1} + \frac{4}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2q+1)}{\Gamma(2q+1)\,\Gamma(2q+2)} \left(\frac{w}{2}\right)^{4q+1} \right) = -L_1 + L_2,$$

zur Abkürzung. Hier ist zunächst

$$(10.37) \qquad L_1 = \frac{2}{\pi} \log \frac{w}{2} (J_1(w) - i J_1(iw)),$$

wie aus der Reihenentwicklung für J_1

$$J_1(w) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{\Gamma(q+1)\,\Gamma(q+2)} \left(\frac{w}{2}\right)^{2q+1}$$

folgt. Andererseits ergibt die Entwicklung von Y_1

$$Y_1(w) = -\frac{2}{\pi} J_1(w) \log \frac{w}{2}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{\frac{\Gamma'}{\Gamma}(q+1) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(q+2)}{\Gamma(q+1)\,\Gamma(q+2)} \left(\frac{w}{2}\right)^{2q+1} + \frac{2}{\pi w}$$

bei unserem für $w > 0$ reellen Zweig der Hauptwert des Logarithmus nehmen ist, verbunden mit

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(2q+2) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(2q+1) = \frac{1}{2q+1},$$

0.38) $$Y_1(w) - iY_1(iw) = -L_1 + L_2 - J_1(iw).$$

0.36), (10.37) und (10.38) ergeben zusammen

$$Y_1(w) - iY_1(iw) = -J_1(iw) + J_{2,0}(w),$$

as wegen (10.31) mit der zu beweisenden Relation (10.33) gleichedeutend ist.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß man in (10.3) für λ und $F(n)$ die Werte (10.11) einsetzen kann [40]) und daß wegen $\varkappa = 2$ e Reihe (10.3) konvergiert.

Die Beziehung (1.6) für einen *beliebigen* Zahlkörper $\mathfrak{R}$, d. h.

0.4) $$H(x) - \frac{1}{2}F(x) = h\lambda x + \zeta_{\mathfrak{R}}(0) + A\sqrt[k]{\frac{x}{A^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{1-\frac{1}{k}}} J_{r_1 \cdot r_2}\left(2k\pi \sqrt[k]{\frac{nx}{|\Delta|}}\right)$$

t in meiner Dissertation [41]), jedoch mit folgenden Einschränkungen gegenber dem Hauptsatz, bewiesen worden:

1. es wird nur Summabilität $\left(n, \left[\frac{k-1}{2}\right]\right)$ nachgewiesen [42]) und 2. die egative Behauptung 3. des Hauptsatzes fehlt.

II. Gruppe: Piltzsches Teilerproblem im rationalen Körper.

Da ist zunächst der Fall $m = 2$, das sogenannte *Dirichletsche eilerproblem*. Wegen

$$R(x) = x\log x + (2C-1)x,$$

o C die Eulersche Konstante ist, und (10.33) lautet der betreffende pezialfall von (1.6)

0.5) $$H(x) - \frac{1}{2}F(x) = x\log x + (2C-1)x + \frac{1}{4} + \sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{\sqrt{n}} \{Y_1(4\pi\sqrt{nx}) - H_1(4\pi\sqrt{nx})\}.$$

[40]) Vgl. Weber, l. c. [31]).

[41]) *Dissertation*, Satz II, S. 34.

[42]) Nach dem Permanenzgesetz (vgl. den Anfang von § 5) nimmt die Kraft des mmationsverfahrens mit steigender Ordnung zu, und für $k \geqq 3$ ist $\left[\frac{k-1}{2}\right] > \frac{k-3}{2}$.

Diese Entwicklung wurde 1904 von G. Voronoï[43]) bewiesen (mittels sehr ausgedehnter funktionentheoretischer Betrachtungen) und 1915 von G. H. Hardy[44]) wiedergefunden.

Einen Beweis mit der Pfeifferschen Methode gibt W. Rogosinski[45]).

Wegen $\varkappa = 2$ konvergiert die Reihe (10.5).

Für beliebiges $m \geqq 2$ lautet (1.6)

$$(10.6)\quad H(x) - \frac{1}{2}F(x) = R(x) + \left(-\frac{1}{2}\right)^m + \pi^{1-\frac{m}{2}} \sqrt[m]{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{1-\frac{1}{m}}} J_{m,0}(2m\pi \sqrt[m]{nx}).$$

Diese Entwicklung wurde gleichzeitig und unabhängig voneinander von H. Cramér[46]) und dem Verfasser[47]) gegeben. Die betreffenden Ergebnisse weisen zunächst gegenüber dem Hauptsatz genau die gleichen Einschränkungen auf, wie die bei (10.4) genannten, nämlich:

1. es wird nur Summabilität $\left(n, \left[\frac{m-1}{2}\right]\right)$ nachgewiesen und 2. die negative Behauptung 3. des Hauptsatzes fehlt.

Hinzu kommt noch, daß Cramér — für den die Reihe (10.6) nicht Selbstzweck, sondern nur ein Mittel zur Behandlung von O-Problemen ist — die Summabilität von (10.6) für ganzzahlige x nicht untersucht. Die von Cramér angewandte Methode geht zwar ebenfalls auf die in Fußnote [4]) genannte Hardysche Arbeit zurück, sie differiert jedoch in vielen Punkten von den Ausführungen der *Dissertation* und der vorliegenden Abhandlung.

Wiesbaden, den 26. März 1924.

---

[43]) G. Voronoï, „Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation des quelques séries“ [Annales de l'École Normale, Ser. 3, **21** (1904) S. 207–267; 459–533]; S. 515, S. 513, S. 235, S. 236.

[44]) G. H. Hardy, „On Dirichlet's divisor problem“ [Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, **15** (1916), S. 1–25], S. 20, Formel (6.33), wo indes die unendliche Reihe mit einem Vorzeichenfehler wiedergegeben ist.

[45]) W. Rogosinski, „Neue Anwendung der Pfeifferschen Methode bei Dirichlets Teilerproblem“, Inaug.-Dissert. [Göttingen (1922) bei W. Fr. Kaestner 32 S.].

[46]) H. Cramér, „Über das Teilerproblem von Piltz“. [Arkiv för Matematik Astronomi och Fysik, **16** (1922), Nr. 21, 40 S.]

[47]) *Dissertation*, Satz III, S. 50.

(Eingegangen am 20. Mai 1924.)

Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Walfisz: Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern[1]).

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Die ganze Schwierigkeit beim Beweise des Walfiszschen Hauptsatzes besteht in dem Nachweis der folgenden Behauptungen. Ich verwende bei ihrer Formulierung die Walfiszschen Bezeichnungen, setze ferner

$$\frac{2\varkappa\pi}{\sqrt[\varkappa]{D}} = \eta,$$

$$\left[\frac{\varkappa+1}{2}\right] = h$$

und verstehe

unter dem Mittelwert von $\Psi(x)$ in $x=\xi$ die Zahl

$$\frac{\Psi(\xi-0)+\Psi(\xi+0)}{2}$$

(deren Existenz allemal mitbehauptet wird);

unter $\mathfrak{G}$ ein beliebiges ganzes x mit $F(x) \neq 0$;

unter $\mathfrak{P}$ eine beliebige positive Strecke $x_1 \leqq x \leqq x_2$;

unter $\mathfrak{S}$ ein $\mathfrak{P}$, dem kein $\mathfrak{G}$ angehört;

unter Summabilität λ-ter Ordnung $(\lambda \geqq 0)$ die Rieszsche (R, n, λ), die sich bekanntlich mit der Cesàroschen (C, λ) deckt;

unter $W_\nu(x)$ formal die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} \cos\left(\eta \sqrt[\varkappa]{nx} + (\varrho_1+1)\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{für} \quad \nu = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+\frac{\nu}{\varkappa}}} \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(\eta \sqrt[\varkappa]{nx}) \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, h-1.$$

[1]) Math. Zeitschrift 22 (1925), S. 153—188.

Die Behauptungen lauten:

1. *Im Falle* $\varkappa = 2$ *ist* $W_0(x)$
   a) *für* $x > 0$ *konvergent,*
   b) *für* $\mathfrak{S}$ *gleichmäßig konvergent,*
   c) *für* $\mathfrak{G}$ *gleich dem Mittelwert.*
2. *Im Falle* $\varkappa > 2$ *ist* $W_0(x)$
   a) $\frac{\varkappa-3}{2}$*-ter Ordnung für kein* $x > 0$ *summabel,*
   b) $\left(\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon\right)$*-ter Ordnung (bei jedem* $\varepsilon > 0$*)*
      α) *für* $x > 0$ *summabel,*
      β) *für* $\mathfrak{S}$ *gleichmäßig summabel,*
      γ) *für* $\mathfrak{G}$ *zum Mittelwert summabel.*
3. *Im Falle* $\varkappa > 2$ *ist* $W_\nu(x)$, $\nu = 1, \ldots, h-1$, *von* $\frac{\varkappa-3}{2}$*-ter Ordnung*
   a) *für* $x > 0$ *summabel,*
   b) *für* $\mathfrak{P}$ *gleichmäßig summabel.*

Diese Schwierigkeit werde ich nun — vom Grundgedanken der Nr. 4 der in Anm. [34]) bei Herrn Walfisz genannten Arbeit von Herrn Hardy und mir ausgehend (zu dem allerdings manche neue Überlegungen hinzu kommen müssen) — auf ganz anderem und einfacherem Wege überwinden. Dadurch werden alle tieferen Rieszschen Sätze entbehrlich.

Definition. *Es sei* $f(y)$ *für jedes* $\omega > 0$ *von* 0 *bis* ω *eigentlich integrabel im Riemannschen Sinn. Dann werde für* $y \geqq 0$ *gesetzt:*

$$(1) \qquad f_{(\lambda)}(y) = \begin{cases} f(y), & \text{falls } \lambda = 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\lambda)} \displaystyle\int_0^y (y-u)^{\lambda-1} f(u)\,du, & \text{falls } \lambda > 0. \end{cases}$$

Bekanntlich folgt aus (1)

$$(2) \qquad f'_{(\lambda)}(y) = f_{(\lambda-1)}(y) \quad \text{für} \quad \lambda > 1,\ y > 0,$$

$$(3) \qquad f_{(\lambda+\mu)}(y) = (f_{(\lambda)})_{(\mu)}(y) \quad \text{für} \quad \lambda \geqq 0,\ \mu \geqq 0,$$

$$(4) \qquad f_{(\lambda)}(y) = \int_0^y dy_1 \ldots \int_0^{y_{\lambda-2}} dy_{\lambda-1} \int_0^{y_{\lambda-1}} f(u)\,du \quad \text{für ganzes } \lambda > 0$$

und für $z > 0$ nebst ganzem $\lambda > 0$

$$(5) \qquad \sum_{j=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-j} \binom{\lambda}{j} f_{(\lambda)}(y+jz) = \int_y^{y+z} dy_1 \ldots \int_{y_{\lambda-2}}^{y_{\lambda-2}+z} dy_{\lambda-1} \int_{y_{\lambda-1}}^{y_{\lambda-1}+z} f(u)\,du.$$

$f(y)$ heißt mediabel λ-ter Ordnung, wenn

$$\lim_{y=\infty} \frac{f_{(\lambda)}(y)}{y^{\lambda}} \tag{6}$$

existiert; die formal aufgeschriebene Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{7}$$

heißt summabel λ-ter Ordnung, wenn

$$f(y) = \sum_{n \leqq y} a_n$$

mediabel λ-ter Ordnung ist, und man sagt dann, (7) ist zum Werte

$$\Gamma(\lambda+1) \lim_{y=\infty} \frac{f_{(\lambda)}(y)}{y^{\lambda}}$$

von λ-ter Ordnung summabel. Entsprechend ist, wenn a_n noch von x abhängt, gleichmäßige Summabilität für eine x-Menge erklärt; der Grenzwert (6) soll dann gleichmäßig in x vorhanden sein.

Ich setze für $y > 0$

$$P(y) = H(y) - R(y) - Z(0),$$
$$P(0) = P(+0).$$

Dann lautet meine Formel (9.11) in der Walfiszschen Arbeit

$$P_{(\mu)}(y) = \mathsf{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{4}-\infty i}^{\frac{3}{4}+\infty i} G(s) \left(\frac{n}{\mathsf{A}^2}\right)^s \frac{y^{s+\mu}}{s(s+1)\ldots(s+\mu)}\, ds \quad \text{für } y > 0. \tag{8}$$

Unter c bzw. p verstehe ich dauernd komplexe bzw. positive, nur von $\mathfrak{R}$ und m abhängige Konstanten. Die Abhängigkeit von weiteren Parametern wird durch angehängte Indizes ausgedrückt.

Ich setze noch

$$(\varrho_1 + 1 + 2h)\frac{\pi}{4} = q.$$

Satz 1.

$$\int_{\frac{3}{4}-\infty i}^{\frac{3}{4}+\infty i} G(s) \frac{w^{s+h}}{s(s+1)\ldots(s+h)}\, ds$$
$$= c\, w^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa} + h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)} \cos\left(\tau \sqrt[\varkappa]{w} + q\right) + O\left(w^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa} + h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right) - p}\right).$$

Beweis. Genau entsprechend meinem Beweise von Herrn Walfisz' Hilfssatz 1; nur kürzer, da nicht einmal die wahre Größenordnung des zweiten Gliedes gebraucht wird.

Satz 2.

$$(9)\quad P_{(h)}(y) = cy^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{h}{\varkappa}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} \cos\left(\eta \sqrt[\varkappa]{ny}+q\right) + O\left(y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}\right)$$

also $\left(\text{wegen } \frac{h}{\varkappa}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa} \geqq 1+\frac{1}{2\varkappa} = 1+p\right)$ *a fortiori*

$$(10)\quad P_{(h)}(y) = O\left(y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}\right).$$

Beweis. Zunächst zeige ich, daß (8) noch $(\mu-h)$-malige Differentiation unter dem Integralzeichen verträgt, wodurch nach (2)

$$(11)\quad P_{(h)}(y) = c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n} \int_{\frac{3}{4}-\infty i}^{\frac{3}{4}+\infty i} G(s) \left(\frac{n}{A^2}\right)^s \frac{y^{s+h}}{s\ldots(s+h)}\, ds$$

entsteht. In der Tat ist nach Satz 1 für $w>0$

$$\left| \int_{\frac{3}{4}-\infty i}^{\frac{3}{4}+\infty i} G(s) \frac{w^{s+h}}{s\ldots(s+h)}\, ds \right| < p w^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}$$

(da das Integral offenbar $O(w^{\frac{3}{4}+h})$ bei $w \to 0$ ist), also für $n \geqq 1$, $y>0$

$$\left| \int_{\frac{3}{4}-\infty i}^{\frac{3}{4}+\infty i} G(s) \left(\frac{n}{A^2}\right)^s \frac{y^{s+h}}{s\ldots(s+h)}\, ds \right| < \frac{p}{n^h} (ny)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}$$

$$= \frac{p}{n^{\frac{h}{\varkappa}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)},$$

so daß wegen der Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{1+p}}$$

die Reihe rechts in (11) auf jeder positiven Strecke $y_1 \leqq y \leqq y_2$ gleichmäßig konvergiert.

Die genaue Form des Satzes 1 lehrt für $n \geqq 1$, $y>1$

$$\int_{\frac{3}{4}-\infty i}^{\frac{3}{4}+\infty i} G(s) \left(\frac{n}{A^2}\right)^s \frac{y^{s+h}}{s\ldots(s+h)}\, ds - \frac{c}{n^{\frac{h}{\varkappa}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)} \cos\left(\tau \sqrt[\varkappa]{\frac{ny}{A^2}} + q\right)$$

$$< p \frac{y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)-p}}{n^{\frac{h}{\varkappa}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+p}},$$

lso nach (11) die Behauptung (9) mit Rücksicht auf

$$\frac{\tau}{\sqrt[\varkappa]{A^2}} = \frac{\varkappa 2^{\frac{\varrho_1}{\varkappa}}}{\sqrt[\varkappa]{2^{-2\varrho_2}\pi^{-\varkappa}D}} = \frac{2\varkappa\pi}{\sqrt[\varkappa]{D}} = \eta.$$

Definition. *Für $y > 0$ sei*

$$g_0(y) = \frac{\cos\left(\eta\sqrt[\varkappa]{y} + (\varrho_1+1)\frac{\pi}{4}\right)}{y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}}. \tag{12}$$

Satz 3.

$$\int_1^\infty P_{(h)}(y)\, g_0^{(h+1)}(xy)\, dy$$

onvergiert für $x > 0$, gleichmäßig für $\mathfrak{S}$, zum Mittelwert für $\mathfrak{G}$.

Beweis. Auf $\mathfrak{P}$ ist gleichmäßig

$$g_0^{(h+1)}(xy) = \frac{c}{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+(h+1)\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}} \frac{\cos\left(\eta\sqrt[\varkappa]{xy} + (\varrho_1+2h+3)\frac{\pi}{4}\right)}{y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+(h+1)\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}} + O\left(\frac{1}{y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+(h+1)\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)+p}}\right).$$

ieraus und aus (9) folgt wegen

$$y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)} \frac{1}{y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+(h+1)\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}} = \frac{1}{y},$$

aß der Integrand gleichmäßig

$$\frac{c}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+(h+1)\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{h}{\varkappa}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} \frac{\cos(\eta\sqrt[\varkappa]{ny}+q)\cos\left(\eta\sqrt[\varkappa]{xy}+q+\frac{\pi}{2}\right)}{y} + O\left(\frac{1}{y^{1+p}}\right)$$

t, so daß es genügt, die drei Behauptungen für

$$\int_1^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{h}{\varkappa}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} \frac{\cos(\eta\sqrt[\varkappa]{ny}+q)\sin(\eta\sqrt[\varkappa]{xy}+q)}{y} dy \tag{13}$$

beweisen.

Für $\omega > 1$ ist wegen der (bei festem $x > 0$) gleichmäßigen Konvergenz er Summe in (13) auf $1 \leqq y \leqq \omega$

$$\int_1^\omega \sum_{n=1}^{\infty} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{h}{\varkappa}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} \int_1^\omega \frac{\cos(\eta\sqrt[\varkappa]{ny}+q)\sin(\eta\sqrt[\varkappa]{xy}+q)}{y} dy. \tag{14}$$

Nun konvergieren

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\eta \sqrt[\varkappa]{z}+2q)}{z}\,dz \tag{15}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\eta \sqrt[\varkappa]{z})}{z}\,dz; \tag{16}$$

daher ist

$$2\int_1^\omega \frac{\cos(\eta \sqrt[\varkappa]{ny}+q)\sin(\eta \sqrt[\varkappa]{xy}+q)}{y}\,dy$$

$$=\int_1^\omega \frac{\sin(\eta(\sqrt[\varkappa]{x}+\sqrt[\varkappa]{n})\sqrt[\varkappa]{y}+2q)}{y}\,dy+\int_1^\omega \frac{\sin(\eta(\sqrt[\varkappa]{x}-\sqrt[\varkappa]{n})\sqrt[\varkappa]{y})}{y}\,dy$$

$$=\int_{(\sqrt[\varkappa]{x}+\sqrt[\varkappa]{n})^\varkappa}^{(\sqrt[\varkappa]{x}+\sqrt[\varkappa]{n})^\varkappa \omega} \frac{\sin(\eta \sqrt[\varkappa]{z}+2q)}{z}\,dz+\operatorname{sign}(x-n)\int_{|\sqrt[\varkappa]{x}-\sqrt[\varkappa]{n}|^\varkappa}^{|\sqrt[\varkappa]{x}-\sqrt[\varkappa]{n}|^\varkappa \omega} \frac{\sin(\eta \sqrt[\varkappa]{z})}{z}\,dz \tag{17}$$

für $n \geqq 1$, $x > 0$, $\omega > 1$ gleichmäßig beschränkt, so daß die Summ rechts in (14) für $x > 0$, $\omega > 1$ gleichmäßig konvergiert.

Also genügt es, bei festem $n \geqq 1$ zu zeigen, daß der Ausdruck (17 bei $\omega \to \infty$ für jedes $x > 0$ gegen einen Limes strebt, ferner für $0 < x < 1$ $|x-n| > p$ gleichmäßig und in $x = n$ gegen den Mittelwert. All di ergibt sich aus der Konvergenz der Integrale (15) und (16), da a $0 < x < p$, $|x-n| > p$ gewiß $|\sqrt[\varkappa]{x}-\sqrt[\varkappa]{n}| > p$ folgt und

$$0=\frac{1}{2}\left(-\int_0^\infty \frac{\sin(\eta \sqrt[\varkappa]{z})}{z}\,dz+\int_0^\infty \frac{\sin(\eta \sqrt[\varkappa]{z})}{z}\,dz\right)$$

ist.

Satz 4. *Ist $f'(y)$ für $y > 0$ stetig, so ist für $\omega \geqq 0$*

$$\begin{cases} \sum\limits_{n \leqq \omega} F(n) f(n) = P(\omega+1) f(\omega+1) - \int\limits_1^{\omega+1} P(y) f'(y)\,dy \\ \quad + \int\limits_1^{\omega+1} R'(y) f(y)\,dy + (R(1)+Z(0)) f(1) - F([\omega]+1) f([\omega]+1 \end{cases} \tag{18}$$

Beweis.

$$\int_1^{\omega+1} H(y) f'(y)\,dy = \int_1^{\omega+1} f'(y) \sum_{n \leqq y} F(n)\,dy = \sum_{n \leqq \omega+1} F(n) \int_n^{\omega+1} f'(y)\,dy$$

$$= \sum_{n \leqq \omega+1} F(n)\,(f(\omega+1)-f(n)) = H(\omega+1) f(\omega+1) - \sum_{n \leqq \omega+1} F(n) f(n)$$

$$\sum_{n\leqq\omega+1} F(n)\,f(n) = H(\omega+1)\,f(\omega+1) - \int_1^{\omega+1} H(y)\,f'(y)\,dy$$

$$= P(\omega+1)f(\omega+1) - \int_1^{\omega+1} P(y)\,f'(y)\,dy + (R(\omega+1)+Z(0))f(\omega+1)$$

$$- \int_1^{\omega+1} (R(y)+Z(0))\,f'(y)\,dy,$$

$$\sum_{n\leqq\omega} F(n)\,f(n) + F([\omega]+1)\,f([\omega]+1) = P(\omega+1)\,f(\omega+1) - \int_1^{\omega+1} P(y)\,f'(y)\,dy$$

$$+ (R(\omega+1)+Z(0))\,f(\omega+1) - \{(R(y)+Z(0))\,f(y)\}_1^{\omega+1}$$

$$+ \int_1^{\omega+1} R'(y)\,f(y)\,dy.$$

Satz 5. *Die Behauptungen* 1 a), b), c) *sind wahr.*

Beweis. Wegen

$$R'(y) = c\log y + c$$

t, wenn

$$f(y) = g_0(xy)$$

esetzt wird (mit dem g_0 aus (12)),

$$\int_1^{\infty} R'(y)\,f(y)\,dy$$

uf $\mathfrak{P}$ gleichmäßig konvergent $\left(\text{wegen } \frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa} = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = 1-\frac{1}{\varkappa}\right)$. Das rste Glied der rechten Seite von (18) strebt auf $\mathfrak{P}$ gleichmäßig gegen 0, da

$$P(\omega+1) = o(\omega^{\frac{3}{4}})$$

t. (Sogar $O(\omega^{\frac{1}{2}})$ ist trivial und Schärferes bekannt.) Das zweite hat wegen

$$\int^{+1} P(y)\,f'(y)\,dy = P_{(1)}(\omega+1)\,f'(\omega+1) - P_{(1)}(1)\,f'(1) - \int_1^{\omega+1} P_{(1)}(y)\,f''(y)\,dy,$$

egen (10) und Satz 3 (mit $h=1$) die gewünschten drei Eigenschaften; as vierte ist konstant; das fünfte strebt auf $\mathfrak{P}$ gleichmäßig gegen 0. 18) lehrt also alles Behauptete[2]).

---

[2]) Man beachte, wie schnell hiermit u. a. die berühmte Voronoïsche Identität r $\sum_{n\leqq x} T(n) = \sum_{ab\leqq x} 1 = \sum_{n\leqq x} \left[\frac{x}{n}\right]$ bewiesen ist; Formel (10.5) der Walfiszschen rbeit.

Von jetzt ab sei $\varkappa \geqq 3$, also $h \geqq 2$.

Satz 6.[3]) *Es sei* $N \geqq 2$ *ganz,* $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $z = y^{\frac{\beta-\alpha}{N}}$,

$$f(y) = O(y^\alpha),$$

$$f_{(N)}(y) = O(y^\beta).$$

Dann ist für $M = 0, 1, \ldots, N$

$$f_{(M)}(y) = O(z^M y^\alpha). \tag{19}$$

Beweis. 1. Es sei $\beta - \alpha \geqq N$. Dann ist die Behauptung trivial, d $y = O(z)$, also nach (4)

$$f_{(M)}(y) = O(y^M y^\alpha) = O(z^M y^\alpha).$$

2. Es sei $\beta - \alpha < N$. Da (19) für $M = 0$ und $M = N$ vorausgesetz ist, darf $0 < M < N$ und

$$f_{(M-1)}(y) = O(z^{M-1} y^\alpha) \tag{20}$$

schon als wahr angenommen werden. Nach (3) ist

$$f_{(N)}(y) = (f_{(M)})_{(N-M)}(y),$$

wegen (5) also

$$\sum_{j=0}^{N-M} (-1)^{N-M-j} \binom{N-M}{j} f_{(N)}(y+jz) = \int_y^{y+z} dy_1 \ldots \int_{y_{N-M-1}}^{y_{N-M-1}+z} f_{(M)}(u)\, du. \tag{21}$$

Die linke Seite von (21) ist, wegen $z = O(y)$,

$$O(y^\beta) = O(z^N y^\alpha),$$

die rechte, da für $y \leqq u \leqq y + (N-M)z$ nach (4) und (20) gleichmäßi

$$f_{(M)}(u) - f_{(M)}(y) = \int_y^u f_{(M-1)}(v)\, dv = O(z \cdot z^{M-1} y^\alpha)$$

ist,

$$z^{N-M}(f_{(M)}(y) + O(z^M y^\alpha)).$$

Daher ist

$$f_{(M)}(y) = O(z^M y^\alpha) + O\left(\frac{z^N y^\alpha}{z^{N-M}}\right) = O(z^M y^\alpha).$$

Satz 7. $P_{(h-l)}(y) = O\left(y^{h+\frac{1}{2}-\frac{3}{2\varkappa}-l\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)-p}\right)$ *für* $l = 0, 1, \ldots, h$.

Beweis. Für $l = 0$ ist dies wahr, da wegen $h > 1$ der Exponent in (1

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa} + h\left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right) < h + \frac{1}{2} - \frac{3}{2\varkappa}$$

[3]) Bei stetigem $f(y)$ Spezialfall eines allgemeineren Satzes der Herren Hard und Littlewood (*Contributions to the Arithmetic Theory of Series* [Proceedings of t London Mathematical Society, Ser. (2) **11** (1913), S. 411–478], theorem 3 (a) [S. 422

. Für $l = h$ ist es wahr, da ich[4])

$$P_{(0)}(y) = O\left(y^{1-\frac{2}{\varkappa+1}+\varepsilon}\right)$$

i jedem $\varepsilon > 0$ bewiesen hatte und

$$h + \frac{1}{2} - \frac{3}{2\varkappa} - h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right) = \frac{h}{\varkappa} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2\varkappa} \begin{cases} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \\ \geqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2\varkappa} = 1 - \frac{3}{2\varkappa} \end{cases}$$

$$> 1 - \frac{2}{\varkappa+1} \text{ bei } \begin{cases} \varkappa = 3, \\ \varkappa > 3 \end{cases}$$

Da $h + \frac{1}{2} - \frac{3}{2\varkappa} - l\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)$ linear von l abhängt, folgt nunmehr aus tz 6 die Behauptung.

Satz 8. *Es sei* $y > 0$, $g_\nu(y)$ *für* $\nu = 0$ *durch* (12) *definiert, für* $= 1, 2, \ldots, h-1$ *durch*

$$g_\nu(y) = \frac{\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(\eta \sqrt[\varkappa]{y})}{y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+\frac{\nu}{\varkappa}}}.$$

s sei $l = 0, 1, \ldots, h+1$ *und* $\nu + l > 0$. *Dann ist, gleichmäßig auf* $\mathfrak{P}$. *ei* $\omega \to \infty$,

$$\int_1^{\omega+1} P_{(h)}(y)\, g_\nu^{(h+1-l)}(xy)\, dy = \begin{cases} c_{\nu,x} + o(1) & \text{für} \quad l = 0, \\ o(\omega^l) & \text{für} \quad l > 0 \end{cases}$$

o daß $c_{\nu,x}$ *stetig von* x *abhängt*).

Beweis. Nach (10) ist der Integrand, gleichmäßig auf $\mathfrak{P}$,

$$O\left(\frac{y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}+h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}}{y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+\frac{\nu}{\varkappa}+(h+1-l)\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}}\right) = O\left(y^{l-1-\frac{\nu}{\varkappa}-\frac{l}{\varkappa}}\right) = O\left(y^{l-1-p}\right).$$

n Falle $l = 0$ ist also $\int_1^\infty$ gleichmäßig konvergent, im Falle $l > 0$ gleichmäßig

$$\int_1^{\omega+1} = O\int_1^{\omega+1} y^{l-1-p}\, dy = O(\omega^{l-p}) = o(\omega^l).$$

Satz 9. *Für* $\nu = 0, 1, \ldots, h-1$ *und* $l = 0, 1, 2$ *ist auf* $\mathfrak{P}$ *gleich-äßig*

$$P_{(h-l)}(y)\, g_\nu^{(2-l)}(xy) = o(y^{h-2}).$$

---

[4]) *Über die Heckesche Funktionalgleichung* [Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft r Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse, Jahrg. 1917, S. 102–111].

Beweis. Nach Satz 7 ist gleichmäßig

$$P_{(h-l)}(y)\,g_\nu^{(2-l)}(xy) = O\left(y^{h+\frac{1}{2}-\frac{3}{2\varkappa}-l\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)-p-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}-(2-l)\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}\right)$$
$$= O(y^{h-2-p}) = o(y^{h-2}).$$

Von jetzt ab seien für $x > 0$ die $c_{\nu,x}$, oft kurz c_x geschrieben, stetig; die $b_{\nu,x}$, kurz b_x, für $x \neq \mathfrak{G}$ stetig und in $\mathfrak{G}$ gleich dem Mittelwert.

Satz 10. *Für* $\nu = 0, 1, \ldots, h-1$ *werde*

$$\varphi(\omega) = P(\omega+1)\,g_\nu(x(\omega+1)) - x\int_1^{\omega+1} P(y)\,g_\nu'(xy)\,dy$$

gesetzt (d. i. die Summe der beiden ersten Ausdrücke rechts in (18) mit $f(y) = g_\nu(xy)$). *Dann ist für jedes* $x > 0$

$$(22)\quad \varphi_{(h-2)}(\omega) = \begin{cases} b_x\,\omega^{h-2} + o(\omega^{h-2}), & \text{falls } \nu = 0, \text{ und zwar gleichmäßig auf } \mathfrak{S}, \\ c_x\,\omega^{h-2} + o(\omega^{h-2}), & \text{falls } \nu > 0, \text{ und zwar gleichmäßig auf } \mathfrak{P}. \end{cases}$$

Beweis. Ich werde kurz g statt g_ν schreiben und unter den Integralzeichen bei $P_{(\lambda)}$, $g^{(\lambda)}$ die Argumente y, xy, in den integralfreien Gliedern die Argumente $\omega+1$, $x(\omega+1)$ weglassen. Dann ist

$$\varphi(\omega) = Pg + c_x P_{(1)}\,g' + c_x\int_1^{\omega+1} P_{(1)}\,g''\,dy + c_x$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= c_x P_{(0)}\,g^{(0)} + c_x P_{(1)}\,g' + \ldots + c_x P_{(h)}\,g^{(h)} + c_x\int_1^{\omega+1} P_{(h)}\,g^{(h+1)}\,dy + c_x.$$

Für $\nu = 0$ ist nach Satz 3 bei jedem $x > 0$, und zwar auf $\mathfrak{S}$ gleichmäßig,

$$c_x\int_1^{\omega+1} P_{(h)}\,g^{(h+1)}\,dy + c_x = b_x + o(1),$$

und dieser Bestandteil liefert durch Anwendung des Operators $f_{(h-2}$ gleichmäßig

$$b_x\,\omega^{h-2} + o(\omega^{h-2}).$$

Für $\nu > 0$ ist nach Satz 8 mit $l = 0$ gleichmäßig auf $\mathfrak{P}$

$$c_x\int_1^{\omega+1} P_{(h)}\,g^{(h+1)}\,dy + c_x = c_x + o(1),$$

und dieser Bestandteil liefert durch Anwendung des Operators $f_{(h-2}$ gleichmäßig

$$c_x\,\omega^{h-2} + o(\omega^{h-2}).$$

Es langt also zum Beweise von (22), für

3) $$\psi(\omega) = c_x P_{(0)} g^{(0)} + \ldots + c_x P_{(h)} g^{(h)}$$

ichmäßig auf $\mathfrak{P}$ zu beweisen:

4) $$\psi_{(h-2)}(\omega) = o(\omega^{h-2}).$$

Ich werde zunächst gleichmäßig

5) $$\psi_{(l)}(\omega) = c_x P_{(l)} g^{(0)} + \ldots + c_x P_{(h)} g^{(h-l)} + o(\omega^l)$$

$l = 0, 1, \ldots, h-2$ vorrechnen[5]). Für $l = 0$ ist dies nach (23) wahr. sei $0 \leqq l < h-2$ und (25) richtig. Dann folgt das Entsprechende $l+1$ so: Gleichmäßig ist

$$\psi_{(l+1)}(\omega) = c_x \int_0^{\omega} P_{(l)}(y+1)\, g(x(y+1))\, dy + \ldots$$

$$+ c_x \int_0^{\omega} P_{(h)}(y+1)\, g^{(h-l)}(x(y+1))\, dy + o(\omega^{l+1}).$$

erin ist für $l \leqq s \leqq h$ gleichmäßig

$$\int_0^{\omega} P_{(s)}(y+1) g^{(s-l)}(x(y+1))\, dy = \int_1^{\omega+1} P_{(s)}(y)\, g^{(s-l)}(xy)\, dy = \int_1^{\omega+1} P_{(s)}\, g^{(s-l)}\, dy$$

$$= P_{(s+1)} g^{(s-l)} + c_x \int_1^{\omega+1} P_{(s+1)}\, g^{(s-l+1)}\, dy + c_x$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= c_x P_{(s+1)} g^{(s-l)} + \ldots + c_x P_{(h)} g^{(h-l-1)} + c_x \int_1^{\omega+1} P_{(h)}\, g^{(h-l)}\, dy + c_x;$$

dies eingesetzt, ergibt sich nach Satz 8 (in dem $l+1$ statt l zu nehmen) gleichmäßig

$$\psi_{(l+1)}(\omega) = c_x P_{(l+1)} g^{(0)} + \ldots + c_x P_{(h)} g^{(h-l-1)} + o(\omega^{l+1}),$$

i. (25) mit $l+1$ statt l.

Damit ist (25) allgemein bewiesen; insbesondere ist also gleichmäßig

$$\psi_{(h-2)}(\omega) = c_x P_{(h-2)} g^{(0)} + c_x P_{(h-1)} g' + c_x P_{(h)} g'' + o(\omega^{h-2}),$$

h. (24) nach Satz 9 bewiesen.

Satz 11. *Für ganzes $l \geqq 0$ ist, gleichmäßig auf $\mathfrak{P}$,*

$$\int \frac{\log^l y \cdot y^{\frac{\varkappa}{2}-2+\frac{1}{2\varkappa}} e^{i\eta\sqrt[\varkappa]{xy}}}{\sqrt{\omega - y}}\, dy = \sqrt{\frac{\pi\varkappa}{\eta\sqrt[\varkappa]{x}}} \log^l \omega \cdot \omega^{\frac{\varkappa-3}{2}} e^{i\left(\eta\sqrt[\varkappa]{x\omega} - \frac{\pi}{4}\right)} + o\left(\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right).$$

[5]) Die Abhängigkeit der $c_x = c_{\nu,x}$ von l und nachher s unterdrücke ich auch in Bezeichnung.

Beweis. Alle O, o beim Beweise gelten gleichmäßig auf $\mathfrak{P}$.

$$\left|\int_0^1\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{\omega-1}}\int_0^1 |\log^l y|\, y^{\frac{\varkappa}{2}-2+\frac{1}{2\varkappa}}\,dy = o\left(\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right).$$

Nach dem zweiten Mittelwertsatz ist

$$\int_1^{\omega-\omega^{1-\frac{2}{3\varkappa}}} = \frac{c}{\sqrt[\varkappa]{x}}\int_1^{\omega-\omega^{1-\frac{2}{3\varkappa}}} \frac{\log^l y\cdot y^{\frac{\varkappa}{2}-1-\frac{1}{2\varkappa}}}{\sqrt{\omega-y}}\,d\,e^{i\eta\sqrt[\varkappa]{xy}}$$

$$= O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega^{1-\frac{2}{3\varkappa}}}}\log^l\omega\cdot\omega^{\frac{\varkappa}{2}-1-\frac{1}{2\varkappa}}\right) = O\left(\log^l\omega\cdot\omega^{\frac{\varkappa}{2}-1-\frac{1}{2\varkappa}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3\varkappa}}\right) = o\left(\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right)$$

Für $y=\omega-v$, $0<v\leqq\omega^{1-\frac{2}{3\varkappa}}$ ist, gleichmäßig auch in v,

$$\log^l y\cdot y^{\frac{\varkappa}{2}-2+\frac{1}{2\varkappa}} = \log^l\omega\cdot\omega^{\frac{\varkappa}{2}-2+\frac{1}{2\varkappa}}\left(1+O\left(\frac{v}{\omega}\right)\right)$$

$$= \log^l\omega\cdot\omega^{\frac{\varkappa}{2}-2+\frac{1}{2\varkappa}}\left(1+O\left(\omega^{-\frac{2}{3\varkappa}}\right)\right),$$

$$\sqrt[\varkappa]{y} = \sqrt[\varkappa]{\omega}-\frac{v}{\varkappa}\omega^{\frac{1}{\varkappa}-1}+O\left(v^2\omega^{\frac{1}{\varkappa}-2}\right) = \sqrt[\varkappa]{\omega}-\frac{v}{\varkappa}\omega^{\frac{1}{\varkappa}-1}+O\left(\omega^{-\frac{1}{3\varkappa}}\right),$$

$$e^{i\eta\sqrt[\varkappa]{xy}} = e^{i\eta\sqrt[\varkappa]{x\omega}}\,e^{-\frac{i\eta}{\varkappa}\sqrt[\varkappa]{x}\,\omega^{\frac{1}{\varkappa}-1}v}\left(1+O\left(\omega^{-\frac{1}{3\varkappa}}\right)\right),$$

$$\log^l y\cdot y^{\frac{\varkappa}{2}-2+\frac{1}{2\varkappa}}e^{i\eta\sqrt[\varkappa]{xy}} = \log^l\omega\cdot\omega^{\frac{\varkappa}{2}-2+\frac{1}{2\varkappa}}e^{i\eta\sqrt[\varkappa]{x\omega}}\,e^{-\frac{i\eta}{\varkappa}\sqrt[\varkappa]{x}\,\omega^{\frac{1}{\varkappa}-1}v}+O\left(\omega^{\frac{\varkappa}{2}-}\right.$$

daher ist

$$\int_{\omega-\omega^{1-\frac{2}{3\varkappa}}}^{\omega} = \log^l\omega\cdot\omega^{\frac{\varkappa}{2}-2+\frac{1}{2\varkappa}}e^{i\eta\sqrt[\varkappa]{x\omega}}\int_0^{\omega^{1-\frac{2}{3\varkappa}}}\frac{e^{-\frac{i\eta}{\varkappa}\sqrt[\varkappa]{x}\,\omega^{\frac{1}{\varkappa}-1}v}}{\sqrt{v}}\,dv+O\left(\omega^{\frac{\varkappa}{2}-2+\frac{1}{4\varkappa}}\int_0^{\omega}\right.$$

$$= \log^l\omega\cdot\omega^{\frac{\varkappa}{2}-2+\frac{1}{2\varkappa}}e^{i\eta\sqrt[\varkappa]{x\omega}}\sqrt{\frac{\varkappa}{\eta\sqrt[\varkappa]{x}}}\,\omega^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}\int_0^{\frac{1}{\varkappa}\eta\sqrt[\varkappa]{x}\,\omega^{\frac{1}{3\varkappa}}}\frac{e^{-iz}}{\sqrt{z}}\,dz+O\left(\omega^{\frac{\varkappa}{2}-2+\frac{1}{4\varkappa}+\right.$$

$$= \log^l\omega\cdot\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}}e^{i\eta\sqrt[\varkappa]{x\omega}}\sqrt{\frac{\varkappa}{\eta\sqrt[\varkappa]{x}}}\left(\int_0^{\infty}\frac{e^{-iz}}{\sqrt{z}}\,dz+O\left(\omega^{-p}\right)\right)+o\left(\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right)$$

$$= \log^l\omega\cdot\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}}e^{i\eta\sqrt[\varkappa]{x\omega}}\sqrt{\frac{\varkappa}{\eta\sqrt[\varkappa]{x}}}\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}+o\left(\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right).$$

Satz 12. *Für reelles α ist, gleichmäßig auf $\mathfrak{P}$,*

$$\int \frac{R'(y)\, y^{\frac{\varkappa}{2}-2+\frac{1}{2\varkappa}} \cos(\eta \sqrt[\varkappa]{xy} + \alpha)}{\sqrt{\omega - y}}\, dy$$

$$= \sqrt{\frac{\pi\varkappa}{\eta \sqrt[\varkappa]{x}}}\, R'(\omega)\, \omega^{\frac{\varkappa-3}{2}} \cos\left(\eta \sqrt[\varkappa]{x\omega} + \alpha - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right).$$

Beweis. $R'(y)$ ist ein Polynom genau $(m-1)$-ten Grades in $\log y$ t reellen Koeffizienten. Nach Satz 11 ist also, wenn

$$\cos(\eta \sqrt[\varkappa]{xy} + \alpha) = \Re(e^{\alpha i} e^{i\eta \sqrt[\varkappa]{xy}})$$

dacht wird, gleichmäßig

$$\int_0^{\omega} = \sqrt{\frac{\pi\varkappa}{\eta \sqrt[\varkappa]{x}}}\, R'(\omega)\, \omega^{\frac{\varkappa-3}{2}}\, \Re\left(e^{\alpha i + i\left(\eta \sqrt[\varkappa]{x\omega} - \frac{\pi}{4}\right)}\right) + o\left(\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right).$$

Satz 13. *Für $\nu = 0, 1, \ldots, h-1$ werde*

$$\Phi(\omega) = \int_1^{\omega+1} R'(y)\, g_\nu(xy)\, dy$$

setzt (d. i. der dritte Ausdruck rechts in (18) mit $f(y) = g_\nu(xy)$). *Dann t für jedes $x > 0$*

6) $$\Phi_{\left(\frac{\varkappa-3}{2}\right)}(\omega) = \begin{cases} p_x R'(\omega)\, \omega^{\frac{\varkappa-3}{2}} \cos\left(\eta \sqrt[\varkappa]{x\omega} + (\varrho_1+1)\frac{\pi}{4} - \frac{\varkappa-1}{2}\frac{\pi}{2}\right) \\ \qquad + c_x \omega^{\frac{\varkappa-3}{2}} + o\left(\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right), \text{ falls } \nu = 0, \\ c_x \omega^{\frac{\varkappa-3}{2}} + o\left(\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right), \text{ falls } \nu > 0, \end{cases}$$

nd (bei jedem $\varepsilon > 0$)

7) $$\Phi_{\left(\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon\right)}(\omega) = c_x \omega^{\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon} + o\left(\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon}\right).$$

nd zwar gelten (26) *und* (27) *gleichmäßig auf* $\mathfrak{P}$.

Beweis. Alle O, o beim Beweise gelten gleichmäßig auf $\mathfrak{P}$. Für > 0 setze ich

$$g_\nu(y) = g_{(0)}(y),$$

daß,

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\varkappa} + \frac{\nu}{\varkappa}$, $\beta = (\varrho_1+1)\frac{\pi}{4}$ bei $\nu = 0$, $\beta = \left\{\begin{matrix} 0 \\ -\frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}$ bei $\nu > 0$

setzt,

$$g_\nu(y) = \frac{\cos(\eta \sqrt[\varkappa]{y} + \beta)}{y^r}$$

ist. Ich verstehe ferner, etwas anders als bisher, unter $g_{(l)}(y)$ nach einander für $l = 1, \ldots, h$ ein Integral von $g_{(l-1)}(y)$ von der Gestalt

$$p - \frac{\cos\left(\eta \sqrt[\varkappa]{y} + \beta - l\frac{\pi}{2}\right)}{y^r} - \ldots - y^{l\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)} + \sum_{m=1}^{h-l-1} c_m \frac{\cos\left(\eta \sqrt[\varkappa]{y} + p_m\right)}{y^{r+\frac{m}{\varkappa}}} y^{l\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)} + O\left(y^{-r+l-}\right.$$

(wo $\sum_{m=1}^{-1}$ und $\sum_{m=1}^{0}$ Null bedeutet); ein solches gibt es offenbar. Unter Ver wendung der analogen Abkürzungen wie beim Beweise des Satzes 1 ergibt sich

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= R' g_{(1)} + c_x \int_1^{\omega+1} R'' g_{(1)}\, dy + c_x \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= R' g_{(1)} + \ldots + c_x R^{(h)} g_{(h)} + c_x \int_1^{\omega+1} R^{(h+1)} g_{(h)}\, dy + c_x.\end{aligned}$$

Wegen $\frac{h}{\varkappa} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\varkappa} = 1 + p$ ist

$$R^{(h+1)} g_{(h)} = O\left(\frac{\log^p y}{y^h} \frac{y^{h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}}{y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+\frac{\nu}{\varkappa}}}\right) = O\left(\log^p y \cdot y^{-\frac{h}{\varkappa}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}\right) = O\left(y^{-1-p}\right),$$

$$c_x \int_1^{\omega+1} R^{(h+1)} g_{(h)}\, dy = c_x + o(1),$$

$$\Phi(\omega) = R' g_{(1)} + \ldots + c_x R^{(h)} g_{(h)} + c_x + o(1). \tag{28}$$

Ich werde zunächst

$$\Phi_{(l)}(\omega) = R' g_{(l+1)} + \ldots + c_x R^{(h-l)} g_{(h)} + c_x \omega^l + o(\omega^l) \tag{29}$$

für $l = 0, 1, \ldots, h-2$ vorrechnen. Für $l = 0$ ist dies nach (28) wahr. Es sei $0 \leqq l < h-2$ und (29) richtig. Dann folgt das Entsprechende für $l+1$ so:

$$\begin{aligned}\Phi_{(l+1)}(\omega) &= \int_0^{\omega} R'(y+1) g_{(l+1)}(x(y+1))\, dy + \ldots \\ &+ c_x \int_0^{\omega} R^{(h-l)}(y+1) g_{(h)}(x(y+1))\, dy + c_x \omega^{l+1} + o(\omega^{l+1}).\end{aligned}$$

Hierin ist für $l+1 \leqq s \leqq h$

$$\begin{aligned}\int_0^{\omega} R^{(s-l)}(y+1) g_{(s)}(x(y+1))\, dy &= \int_1^{\omega+1} R^{(s-l)}(y) g_{(s)}(xy)\, dy = \int_1^{\omega+1} R^{(s-l)} g_{(s)}\, dy \\ &= R^{(s-l)} g_{(s+1)} + c_x \int_1^{\omega+1} R^{(s-l+1)} g_{(s+1)}\, dy + c_x \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= R^{(s-l)} g_{(s+1)} + \ldots + c_x R^{(h-l-1)} g_{(h)} + c_x \int_1^{\omega+1} R^{(h-l)} g_{(h)}\, dy + c_x;\end{aligned}$$

dies eingesetzt, ergibt sich, wegen

$$R^{(h-l)}g_{(h)} = O\left(\frac{\log^p y}{y^{h-l-1}}\,\frac{y^{h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}}{y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}}\right) = O(y^{l-p}),$$

$$\Phi_{(l+1)}(\omega) = R'g_{(l+2)} + \ldots + c_x R^{(h-l-1)}g_{(h)} + c_x\omega^{l+1} + o(\omega^{l+1}),$$

. (29) mit $l+1$ statt l.

Damit ist (29) allgemein bewiesen; insbesondere ist also

$$\Phi_{(h-2)}(\omega) = R'g_{(h-1)} + c_x R''g_{(h)} + c_x\omega^{h-2} + o(\omega^{h-2}).$$

erin ist

$$g_{(h-1)} = R'(\omega+1)\,p_x\,\frac{\cos\left(\eta\sqrt[\varkappa]{x(\omega+1)}+\beta-(h-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(\omega+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+\frac{\nu}{\varkappa}}}(\omega+1)^{(h-1)\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}$$

$$+ O\left(\log^p\omega\,\frac{\omega^{(h-1)\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}}{\omega^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}+\frac{\nu}{\varkappa}}}\,\omega^{-\frac{1}{\varkappa}}\right)$$

$$R'(\omega)\,p_x\,\omega^{h-2-\frac{h-1}{\varkappa}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}-\frac{\nu}{\varkappa}}\cos\left(\eta\sqrt[\varkappa]{x\omega}+\beta-(h-1)\frac{\pi}{2}\right)+o(\omega^{h-2})$$

egen $-\frac{h-1}{\varkappa}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}-\frac{\nu}{\varkappa}-\frac{1}{\varkappa}\leqq-\frac{h}{\varkappa}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}=-p$); ferner

$$R''g_{(h)} = O\left(\frac{\log^p\omega}{\omega}\,\frac{\omega^{h\left(1-\frac{1}{\varkappa}\right)}}{\omega^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}}\right) = O\left(\log^p\omega\cdot\omega^{h-2-\frac{h}{\varkappa}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}\right) = o(\omega^{h-2}).$$

Also kommt heraus

$$\Phi_{(h-2)}(\omega) = p_x R'(\omega)\,\omega^{h-2-\frac{h-1}{\varkappa}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}-\frac{\nu}{\varkappa}}\cos\left(\eta\sqrt[\varkappa]{x\omega}+\beta-(h-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ c_x\omega^{h-2} + o(\omega^{h-2}).$$

Im Falle eines ungeraden $\varkappa$ ist $h-2=\frac{\varkappa-3}{2}$, $-\frac{h-1}{\varkappa}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}=0$,

o (26) bewiesen. Für $\nu\geqq 1$ ist also auch (27) wahr; für $\nu=0$ ver-

ibt, (27) zu beweisen.

Im Falle eines geraden $\varkappa$ ist wegen $h-2=\frac{\varkappa}{2}-2$, $-\frac{h-1}{\varkappa}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}=\frac{1}{2\varkappa}$

ächst gefunden:

$$\left\{\begin{array}{l}\Phi_{\left(\frac{\varkappa}{2}-2\right)}(\omega) = p_x R'(\omega)\,\omega^{\frac{\varkappa}{2}-2+\frac{1}{2\varkappa}-\frac{\nu}{\varkappa}}\cos\left(\eta\sqrt[\varkappa]{x\omega}+\beta-\frac{\varkappa-2}{2}\frac{\pi}{2}\right)\\ \qquad + c_x\omega^{\frac{\varkappa}{2}-2}+o\left(\omega^{\frac{\varkappa}{2}-2}\right).\end{array}\right.$$

$\nu\geqq 1$ ist $\frac{\varkappa}{2}-2+\frac{1}{2\varkappa}-\frac{\nu}{\varkappa}<\frac{\varkappa}{2}-2$, also $\Phi(\omega)$ gleichmäßig

mediabel $\left(\frac{\varkappa}{2}-2\right)$-ter, also $\frac{\varkappa-3}{2}$-ter und $\left(\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon\right)$-ter Ordnung, wie i
(26), (27) behauptet. Für $\nu=0$ verbleibt, das erste Glied rechts in (30
mit dem gewünschten Erfolg $\frac{1}{2}$-mal und dann noch ε-mal zu integriere
Ersteres geschieht durch Satz 12 mit $\alpha=\beta-\frac{\varkappa-2}{2}\frac{\pi}{2}$; man erhält nämlic

$$p_x\int_0^\omega \frac{R'(y)\,y^{\frac{\varkappa}{2}-2+\frac{1}{2\varkappa}}\cos\left(\eta\sqrt[\varkappa]{xy}+\beta-\frac{\varkappa-2}{2}\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\omega-y}}\,dy$$
$$=p_xR'(\omega)\,\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}}\cos\left(\eta\sqrt[\varkappa]{x\omega}+\beta-\frac{\varkappa-1}{2}\frac{\pi}{2}\right)+o\left(\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}}\right)$$

womit (26) bewiesen ist.

Nun ist nur noch (zum Ziele (27) für $\nu=0$ in beiden Fällen)

$$\int_0^\omega \frac{\log^l y\cdot y^{\frac{\varkappa-3}{2}}\cos\left(\eta\sqrt[\varkappa]{xy}+\beta-\frac{\varkappa-1}{2}\frac{\pi}{2}\right)}{(\omega-y)^{1-\varepsilon}}\,dy=o\left(\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon}\right)$$

bei $0<\varepsilon<1$ vorzurechnen, was so geschieht:

$$\left|\int_0^1\right|\leqq\frac{1}{(\omega-1)^{1-\varepsilon}}\int_0^1|\log^l y|\,y^{\frac{\varkappa-3}{2}}\,dy=o\left(\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon}\right);$$

$$\int_1^{\omega-\omega^{1-\frac{1}{\varkappa}}}=O\left(\frac{1}{\left(\omega^{1-\frac{1}{\varkappa}}\right)^{1-\varepsilon}}\log^l\omega\cdot\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}+1-\frac{1}{\varkappa}}\right)=O\left(\log^l\omega\cdot\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{\varkappa}}\right)$$
$$=o\left(\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}+}\right.$$

nach dem zweiten Mittelwertsatz;

$$\int_{\omega-\omega^{1-\frac{1}{\varkappa}}}^{\omega}=O\int_0^{\omega^{1-\frac{1}{\varkappa}}}\frac{\log^l\omega\cdot\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}}}{v^{1-\varepsilon}}\,dv=O\left(\log^l\omega\cdot\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{\varkappa}}\right)=o\left(\omega^{\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon}\right)$$

Satz 14. *Die Behauptungen* 2a), b) α), β), γ), 3a), b) *sind wahr.*

Beweis. Es sei $x>0$. Alles folgt aus (18) mit

$$f(y)=g_\nu(xy).$$

Das vierte Glied rechts ist von ω frei und stetig, das fünfte strebt auf bei $\omega\to\infty$ gleichmäßig gegen 0, da gleichmäßig

$$g_\nu(xy)=O(y^{-p}).$$

Das vierte und das fünfte Glied sind also auf $\mathfrak{P}$ gleichmäßig mediab $\frac{\varkappa-3}{2}$-ter und $\left(\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon\right)$-ter Ordnung.

Die sechs Behauptungen brauchen also nur für Mediabilität von

$$(\omega+1)f(\omega+1)-\int_1^{\omega+1}P(y)f'(y)\,dy\Big)+\int_1^{\omega+1}R'(y)f(y)\,dy=\varphi(\omega)+\Phi(\omega)$$

eigt zu werden.

2. Es sei $\nu=0$.

a) Nach Satz 10 ist $\varphi(\omega)$ wegen $h-2\leqq\frac{\varkappa-3}{2}$ mediabel $\frac{\varkappa-3}{2}$-ter
lnung, nach Satz 13 jedoch $\Phi(\omega)$ für kein $x>0$, da

$$p_x R'(\omega)\cos\left(\eta\sqrt[\varkappa]{x\omega}+(\varrho_1+1)\frac{\pi}{4}-\frac{\varkappa-1}{2}\frac{\pi}{2}\right)$$

$\omega\to\infty$ gegen keinen Limes strebt. Also ist $\varphi(\omega)+\Phi(\omega)$ nicht
diabel $\frac{\varkappa-3}{2}$-ter Ordnung.

b) Nach Satz 10 ist $\varphi(\omega)$ $\left(\text{wegen } h-2<\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon\right)$ mediabel
$\frac{-3}{2}+\varepsilon\Big)$-ter Ordnung, und zwar gleichmäßig auf $\mathfrak{S}$, zum Mittelwert
$\mathfrak{G}$. Nach Satz 13 ist $\Phi(\omega)$ mediabel $\left(\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon\right)$-ter Ordnung, gleich-
ßig auf $\mathfrak{P}$. Also ist $\varphi(\omega)+\Phi(\omega)$ von $\left(\frac{\varkappa+3}{2}+\varepsilon\right)$-ter Ordnung
diabel

α) stets,

β) gleichmäßig auf $\mathfrak{S}$,

γ) zum Mittelwert in $\mathfrak{G}$.

3. Es sei $\nu>0$. Nach Satz 10 ist $\varphi(\omega)$ $\left(\text{wegen } h-2\leqq\frac{\varkappa-3}{2}\right)$
diabel $\frac{\varkappa-3}{2}$-ter Ordnung, und zwar gleichmäßig auf $\mathfrak{P}$. Nach Satz 13
t für $\Phi(\omega)$ dasselbe. Also ist $\varphi(\omega)+\Phi(\omega)$ von $\frac{\varkappa-3}{2}$-ter Ordnung
diabel

a) stets,

b) gleichmäßig auf $\mathfrak{P}$.

Göttingen, den 19. Mai 1924.

(Eingegangen am 20. Mai 1924.)

Sur un théorème de M. Wiman dans la théorie des fonctions entières*).

Par

Binyamin Amirà, à Tel-Aviv, Palestine.

1. Introduction.

La notion d'ordre dans la théorie des fonctions entières repose, comm on sait, sur l'étude du mode de croissance de ces fonctions. On appell *ordre apparent* d'une fonction entière $F(z)$ un nombre ϱ tel que, ε étan un nombre positif arbitrairement petit, on ait

$$|F(z)| < e^{|z|^{\varrho+\varepsilon}}$$

pour toute valeur de z dont le module dépasse une certaine valeur $|z_0|$,

$$|F(z)| > e^{|z|^{\varrho-\varepsilon}}$$

pour une infinité de valeurs de z s'étendant à l'infini.

En supposant que la fonction $F(z)$ ait une infinité de zéros et considérant la suite

$$0 < r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_\nu \leqq \ldots$$

des modules non nuls de ses zéros, rangés par ordre non décroissant s'étendant à l'infini, on définit un nombre ϱ' tel que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{r_\nu^{\varrho'-\eta}} \text{ diverge} \quad \text{et} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{r_\nu^{\varrho'+\eta}} \text{ converge,}$$

η étant un nombre positif arbitrairement petit. Le nombre ϱ' fini non nul (s'il existe) est dit *exposant de convergence* de la suite des zér de $F(z)$ ou bien aussi *l'ordre réel* de $F(z)$.

*) Mes sentiments de profonde reconnaissance vont à M. le Prof. E. Land pour m'avoir suggéré le sujet du présent travail et pour la cordialité de son acce durant mon séjour à Göttingen.

En se bornant aux *fonctions entières canoniques* (produits canoniques facteurs primaires) on a, d'après M. Hadamard, $\varrho = \varrho'$ et l'on peut rler de *l'ordre* (tout court) de ces fonctions.

Si la somme $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{r_\nu^\delta}$ converge, si petit que soit le nombre positif δ, on t que $F(z)$ est *d'ordre nul.*

Si, au contraire, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{r_\nu^\sigma}$ diverge, quelque grand que soit le nombre posi- σ, on dit que $F(z)$ est *d'ordre infini*. Nous aurons toujours dans la ite ϱ fini.

Un théorème classique de M. Hadamard dit:

Étant donnés une fonction canonique $F(z)$ d'ordre ϱ et un nombre ositif ε arbitrairement petit, il existe une infinité de circonférences, con- ntriques autour de l'origine et de rayons indéfiniment croissants, telles ue pour tout z sur ces circonférences on ait l'inégalité

$$|F(z)| > e^{-|z|^{\varrho+\varepsilon}}.$$

En étudiant l'exemple particulier d'une fonction canonique avec des eros de la forme $-n^{\frac{1}{\varrho}}$, M. Wiman remarqua[1]) que, si l'on a $\varrho < \frac{1}{2}$, cette nction ne restera bornée sur aucun rayon allant de 0 à l'∞. Il arrive lus tard à démontrer le théorème suivant:

Étant donnés une fonction canonique $F(z)$ d'ordre $\varrho < \frac{1}{2}$ et un nombre ositif ε arbitrairement petit, il existe une infinité de circonférences, con- ntriques autour de l'origine et de rayons indéfiniment croissants, telles ue pour tout z sur ces circonférences on ait l'inégalité

$$|F(z)| > e^{|z|^{\varrho-\varepsilon}}.$$

Le nombre $\frac{1}{2}$ est la limite exacte des valeurs admissibles de ϱ, car éxemple spécial cité tout à l'heure montre que pour $\varrho \geqq \frac{1}{2}$ la fonction nsidérée reste bornée lorsque z parcourt l'axe réel de 0 à $-\infty$.

Quant à la démonstration de son théorème, M. Wiman croyait en énonçant que la méthode des inégalités élémentaires devrait suffire; ce est pourtant que plus tard[2]) qu'il a pu donner une démonstration de n théorème et cela en suivant une méthode basée sur un théorème d'ana- se supérieure que M. Phragmèn venait d'établir. Ce dernier théorème ant été précisé par M. M. Phragmèn et Lindelöf, M. Lindelöf donna

[1]) A. Wiman, Über die angenäherte Darstellung von ganzen Funktionen, Ark. r Mat. 1, Stockholm 1903/4, S. 105—111.

[2]) A. Wiman, Sur une extension d'un théorème de M. Hadamard, Ark. för at. 2, Uppsala et Stockholm 1905/6, N. 14.

une démonstration plus simple[3]) du théorème de M. Wiman. En 191 M. Wiener démontra[4]) ce théorème pour la première fois à l'aide d'iné galités élémentaires; mais son exposé, témoignage d'un soin d'exactitud peu commun, laisse aussi peu remarquer le caractère élémentaire de s méthode. Dans le présent travail j'ai tâché de donner une démonstratio élémentaire simple et de préciser sur un certain point le théorème d M. Wiman. Le théorème à démontrer sera formulé comme suit:

Soit $f(z)$ une fonction entière canonique d'ordre ϱ $(0 < \varrho < \frac{1}{2})$ et un nombre positif fixe arbitrairement donné; il existe alors une infinit de circonférences, concentriques autour de l'origine et de rayons indéfini ment croissants, telles que pour tout z sur ces circonférences on ait l'inégalit

$$|f(z)| > e^{|z|^{\varrho-\varepsilon}}.$$

La méthode employée n'emprunte rien à la théorie générale des fonc tions analytiques, et l'on peut établir ensuite l'énoncé plus précis:

Soit $f(z)$ une fonction canonique d'ordre ϱ $(0 < \varrho < \frac{1}{2})$, $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$ deux nombres fixes arbitrairement petits. Il existe alors une in finité de couronnes circulaires, concentriques autour de l'origine e d'épaisseur $\Delta > r^{1-\varrho-\eta}$, r désignant le rayon du contour extérieur de l couronne, et telles que pour tout point z de ces couronnes on ait l'inégalit

$$|f(z)| > e^{|z|^{\varrho-\varepsilon}}.$$

Nous avons remarqué plus haut que pour $\varrho = \frac{1}{2}$ ce théorème n'es plus valable. Dans le cas $\varrho = 0$, par contre, le résultat énoncé est tro faible, car il n'exclue pas même la possibilité que la fonction reste borné sur des rayons reliant 0 à l'∞. La méthode de notre démonstration peu pourtant facilement nous livrer un résultat plus précis. Une méthode u peu différente a permis à M. Littlewood[5]) de démontrer que:

Pour toute fonction d'ordre nul il existe une suite infinie de circon férences de rayons indéfiniment croissants sur lesquelles on a

$$\log|f(z)| \sim \lg P, \qquad P = \frac{r^n}{r_1 r_2 \dots r_n},$$

r étant le rayon de la circonférence, n le nombre des zéros de $f(z)$ d module inférieur à r et $r_1, r_2, \dots, r_n$ les modules de ces zéros.

---

[3]) E. Lindelöf, Sur un théorème de M. Hadamard dans la théorie des fon tions entières, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo **25**, Palermo 1908, p. 228–234.

[4]) F. W. Wiener, Elementare Beiträge zur neueren Funktionentheorie, Inaug Dissertation, Göttingen 1911.

[5]) J. E. Littlewood, On the asymptotic approximation to integral functio of zero order, Proc. London Math. Soc. 2d series, **5** (1907), p. 361–410.

M. Valiron[6]), ayant précisé la notion d'exposant de convergence de la suite des zéros des fonctions d'ordre nul, a pu arriver à des résultats d'une précision encore plus remarquable.

2. La structure de la suite des zéros.

Désignons par z_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$ les zéros d'une fonction canonique $f(z)$ d'ordre ϱ et posons $|z_\nu| = r_\nu$. On sait alors que la suite

(1) $$0 < r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_\nu \leqq \ldots \qquad \lim_{\nu=\infty} r_\nu = \infty$$

est telle, que

(2) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{r_\nu^{\alpha'}} \text{ diverge} \quad \text{et} \quad (2') \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{r_\nu^{\beta'}} \text{ converge}$$

lorsque $0 < \alpha' < \varrho < \beta'$ (α' et β' en outre arbitraires).

Il résulte de la convergence de $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{r_\nu^{\beta'}}$, comme condition nécessaire,

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\nu}{r_\nu^{\beta'}} = 0.$$

Lemme I. *La suite* (1) *possède une infinité de termes* r_μ *tels, qu'on ait*

$$r_\mu^{\alpha'} < \mu.$$

Démonstration. Supposons, au contraire, que pour tout $\mu > \mu_0$ on ait $r_\mu^{\alpha'} \geqq \mu$, c. à d. $\frac{1}{r_\mu^{\alpha'}} \leqq \frac{1}{\mu}$. Déterminons alors un α'' tel que $0 < \alpha' < \alpha'' < \varrho$, et l'on aura $\frac{\alpha''}{\alpha'} > 1$ et $\frac{1}{r_\mu^{\alpha''}} \leqq \frac{1}{\mu^{\frac{\alpha''}{\alpha'}}}$. On aura donc

$$\sum_{\mu=\mu_0}^{\infty} \frac{1}{r_\mu^{\alpha''}} \leqq \sum_{\mu=\mu_0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{\frac{\alpha''}{\alpha'}}}.$$

La somme de droite converge en vertu de $\frac{\alpha''}{\alpha'} > 1$ et la somme de gauche devrait *à fortiori* être convergente, ce qui est en contradiction avec la propriété (2), car $\alpha'' < \varrho$.[7])

Posons maintenant $0 < \varrho < \frac{1}{2}$ et donnons-nous un nombre fixe $\varepsilon > 0$. Déterminons ensuite un nombre fixe $\delta > 0$ tel, qu'on ait $\delta < \varepsilon$, $\delta < 2\varrho$ et $\beta = \varrho + \delta < \frac{1}{2}$, et posons enfin $\alpha = \varrho - \frac{\delta}{2}$.

---

[6]) G. Valiron, Sur les fonctions entières d'ordre nul, Math. Ann. 70, Leipzig 1911, S. 471–498 (S. 474–479).

[7]) V. aussi G. Pólya, Bemerkungen über unendliche Folgen und ganze Funktionen, Math. Ann. 88, Berlin 1923, S. 169–183 (S. 171–173).

Examinons la suite des nombres $\left(\frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu}\right)$. Nous savons déjà que $\lim_{\nu=\infty} \frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu} = \infty$ et qu'il existe une infinité de valeurs r_μ s'étendant à l'infini telles, que $\frac{\mu}{r_\mu^\alpha} > 1$ c. à d. $\frac{\mu^{\frac{1}{\alpha}}}{r_\mu} > 1$ ou bien aussi

$$\frac{\mu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\mu} > \mu^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}.$$

Traçons un diagramme en portant sur l'axe des t les nombres entiers positifs ν et en ordonnées correspondantes $u = \frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu}$, et en joignant par une ligne brisée les points $\left(\nu, \frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu}\right)$.

Cette ligne brisée aura alors une infinité de sommets au dessus de la courbe C $\left(u = t^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}\right)$. La courbe C est convexe, monotone et décroissante. La suite $\frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu}$ possède une infinité de termes qui sont plus petits que tous ceux qui les précèdent. Ces termes[8]) sont joints par la ligne brisée L. On trouve de même parmi les termes, situés au dessus de C, une infinité de termes qui sont plus grands que *tous* ceux de la suite $\left(\frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu}\right)$ qui les suivent. Ceux-ci sont joints par la ligne L_1. L_1 reste toujours au dessus de C. L ne l'est pas nécessairement.

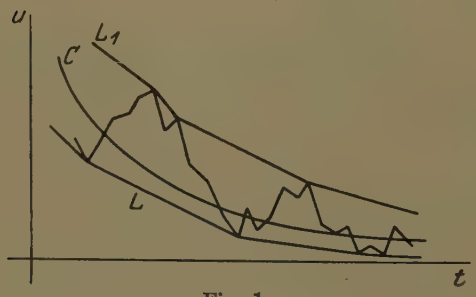

Fig. 1.

Lemme II[9]). *Si la suite* (1) *possède une infinité de terme*

[8]) Nous dirons souvent „le terme $\frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu}$“ au lieu de „le point $\left(\nu, \frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu}\right)$“.

[9]) V. aussi R. Mattson, Sur la croissance du module d'une fonction entière Ark. för Mat. 6, N. 10, p. 2.

n_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, \infty)$ *tels que* $r_{n_\mu} \geqq n_\mu^{\frac{1}{\alpha}}$ $\left(c.\ à\ d.\ que\ \dfrac{n_\mu^{\frac{1}{\beta}}}{r_{n_\mu}}\right.$ *n'est pas au dessus de* $\left. C\right)$, *on a nécessairement*

$$\overline{\lim_{\mu=\infty}} \frac{\lg n_{\mu+1}}{\lg n_\mu} = \lambda > 1.$$

Démonstration. Si l'on avait $\lim_{\mu=\infty} \dfrac{\lg n_{\mu+1}}{\lg n_\mu} = 1$, on pourrait déterminer un nombre α' $(\alpha < \alpha' < \varrho)$ tel, qu'aucun r_n d'indice assez grand ne vérifierait l'inégalité $r_n < n^{\frac{1}{\alpha'}}$, ce qui contredit le lemme I.

On aurait alors, en effet, $n_{\mu+1} < n_\mu^{1+\eta}$ pour tout $\mu > \mu_0(\eta)$, le nombre $\eta > 0$ étant arbitrairement petit. Déterminons η si petit, qu'on ait $\alpha(1+\eta) = \alpha' < \varrho$.

Considérons alors n'importe quel r_n avec $n_\mu < n < n_{\mu+1}$ et $\mu > \mu_0$. On aura alors, en vertu de la donnée $r_{n_\mu} \geqq n_\mu^{\frac{1}{\alpha}}$,

$$r_n \geqq r_{n_\mu} \geqq n_\mu^{\frac{1}{\alpha}} > n_{\mu+1}^{\frac{1}{\alpha(1+\eta)}} > n^{\frac{1}{\alpha'}}.$$

3. Quelques inégalités.

Soit

$$F^*(r) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{r}{r_\nu}\right)$$

une fonction entière d'ordre ϱ $(0 < \varrho < \frac{1}{2})$. Le nombre $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ayant été fixé, nous avions $\beta = \varrho + \delta < \frac{1}{2}$. On a donc $\dfrac{1}{\beta} > 2$ et le nombre $\dfrac{1}{\beta} - 2$ est un nombre positif fixe. Posons

$$4c = \frac{1}{\beta} - 2.$$

Soit $n_0 = n_0(\varepsilon)$ un nombre entier fixe tel, que tout $n > n_0$ vérifie les inégalités

$$c(n+1) > \frac{1}{\beta} \lg(n+1) + \frac{2}{\beta} - \frac{1}{\beta} \lg \frac{n}{n+1}. \tag{3}$$

$$c(n+1) > \frac{2}{\alpha} \lg n \tag{4}$$

$$c > (n+1)^{-\delta}. \tag{5}$$

Théorème I. *Soit* $n > n_0$ *tel, qu'on ait* $\dfrac{n^{\frac{1}{\beta}}}{r_n} \leqq \dfrac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu}$ *pour tout* $\nu < n$

et en même temps $\frac{n^{\frac{1}{\beta}}}{r_n} \geqq \frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu}$ *pour tout* $\nu > n$ *et soit* $\frac{n^{\frac{1}{\beta}}}{r_n} < 1$; *on aura alors pour tout* r *de l'intervalle* $r_n + 1 \leqq r \leqq r_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} - 1$

$$|F^*(r)| > \frac{1}{r_n^2} e^{3c(n+1)}.$$

Démonstration. Nous avons $\frac{n^{\frac{1}{\beta}}}{r_n} \leqq \frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu}$ pour tout $\nu < n$, c. à d.

$$\frac{r_n}{r_\nu} \geqq \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\beta}} \qquad \text{(pour } \nu < n\text{)} \tag{6}$$

et de même $\frac{n^{\frac{1}{\beta}}}{r_n} \geqq \frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu}$ pour tout $\nu > n$, c. à d.

$$\frac{r_n}{r_\nu} \leqq \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\beta}} \qquad \text{(pour } \nu > n\text{)} \tag{7}$$

Posons $r_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} = s_{n+1}$ et l'on aura $r_n < s_{n+1}$; la longueur de l'intervalle $r_n \ldots s_{n+1}$ est, en vertu de $\frac{1}{\beta} > 2$ et $\frac{n^{\frac{1}{\beta}}}{r_n} < 1$, plus grande que 2. On a en outre $\frac{n^{\frac{1}{\beta}}}{r_n} = \frac{(n+1)^{\frac{1}{\beta}}}{s_{n+1}}$ et puisque, en vertu de (7), $\frac{n^{\frac{1}{\beta}}}{r_n} \geqq \frac{(n+1)^{\frac{1}{\beta}}}{r_{n+1}}$, on a aussi $\frac{(n+1)^{\frac{1}{\beta}}}{s_{n+1}} \geqq \frac{(n+1)^{\frac{1}{\beta}}}{r_{n+1}}$ c. à d. $s_{n+1} \leqq r_{n+1}$. L'intervalle, auquel notre r appartient, sera donc

$$r_n < r_n + 1 \leqq r \leqq s_{n+1} - 1 \leqq r_{n+1} - 1 < r_{n+1}. \tag{8}$$

Décomposons $F^*(r)$ comme suit

$$F^*(r) = \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{r}{r_\nu}\right) \cdot \left(1 - \frac{r}{r_n}\right) \cdot \left(1 - \frac{r}{r_{n+1}}\right) \cdot \prod_{\nu=n+2}^{\infty} \left(1 - \frac{r}{r_\nu}\right)$$

et l'on aura, en vertu de (8),

$$|F^*(r)| = \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(\frac{r}{r_\nu} - 1\right) \cdot \left(\frac{r}{r_n} - 1\right) \cdot \left(1 - \frac{r}{r_{n+1}}\right) \cdot \prod_{\nu=n+2}^{\infty} \left(1 - \frac{r}{r_\nu}\right)$$

ou bien aussi

$$|F^*(r)| = \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{r}{r_\nu} \cdot \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{r_\nu}{r}\right) \cdot \left(\frac{r}{r_n} - 1\right) \cdot \left(1 - \frac{r}{r_{n+1}}\right) \cdot \prod_{\nu=n+2}^{\infty} \left(1 - \frac{r}{r_\nu}\right). \tag{9}$$

En vertu de (6) et $r > r_n$, on aura

$$10) \quad \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{r}{r_\nu} > \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{r_n}{r_\nu} \geqq \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\beta}} = e^{\frac{1}{\beta}\sum_1^{n-1} \lg \frac{n}{\nu}} > e^{n\frac{1}{\beta}\left[1-\frac{1}{n}(\lg n+1)\right]}$$

$$> e^{(n+1)\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}\lg(n+1)-\frac{2}{\beta}}.$$

On a de même en vertu de (6), $r > r_n$, $\frac{1}{\beta} > 2$ et $\frac{\nu}{n} < 1$,

$$\prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{r_\nu}{r}\right) > \prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{r_\nu}{r_n}\right) \geqq \prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\left(\frac{\nu}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right) > \prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\left(\frac{\nu}{n}\right)^2\right)$$

$$= e^{\sum_{\nu=1}^{n-1} \lg\left(1-\left(\frac{\nu}{n}\right)^2\right)} > e^{-\frac{1}{2}n\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\left(m+\frac{1}{2}\right)}}.$$

La dernière inégalité est calculée à l'aide de $\int_1^n \lg\left(1-\left(\frac{t}{n}\right)^2\right)dt$ et l'intégrale au moyen du développement en série de $\lg(1-x)$. On a donc

$$11) \quad \prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{r_\nu}{r}\right) > e^{-\frac{1}{2}n\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\left(m+\frac{1}{2}\right)}}.$$

On obtient d'une manière analogue

$$12) \quad \prod_{\nu=n+2}^{\infty}\left(1-\frac{r}{r_\nu}\right) > e^{-\frac{1}{2}(n+1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\left(m-\frac{1}{2}\right)}}.$$

On a, en effet, en vertu de (8), (7) et $\frac{1}{\beta} > 2$,

$$\prod_{\nu=n+2}^{\infty}\left(1-\frac{r}{r_\nu}\right) > \prod_{\nu=n+2}^{\infty}\left(1-\frac{s_{n+1}}{r_\nu}\right) \geqq \prod_{\nu=n+2}^{\infty}\left(1-\left(\frac{n+1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right) > \prod_{\nu=n+2}^{\infty}\left(1-\left(\frac{n+1}{\nu}\right)^2\right)$$

$$= e^{\sum_{n+2}^{\infty} \lg\left(1-\left(\frac{n+1}{\nu}\right)^2\right)} > e^{-\frac{1}{2}(n+1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\left(m-\frac{1}{2}\right)}}.$$

Les inégalités (11) et (12) donnent alors

$$13) \quad \prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{r_\nu}{r}\right)\cdot\prod_{\nu=n+2}^{\infty}\left(1-\frac{r}{r_\nu}\right) > e^{-\frac{1}{2}(n+1)\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m\left(m+\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{m\left(m-\frac{1}{2}\right)}\right)}$$

$$= e^{-(n+1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2-\frac{1}{4}}} = e^{-2(n+1)}.$$

Evaluons enfin les facteurs $\left(\frac{r}{r_n}-1\right)$ et $\left(1-\frac{r}{r_{n+1}}\right)$. On a en vertu de (8)

$$\frac{r}{r_n}-1 = \frac{r-r_n}{r_n} \geqq \frac{r_n+1-r_n}{r_n} = \frac{1}{r_n}$$

et de même

$$1-\frac{r}{r_{n+1}}\geqq 1-\frac{r}{s_{n+1}}=\frac{s_{n+1}-r}{s_{n+1}}\geqq\frac{s_{n+1}-s_{n+1}+1}{s_{n+1}}=\frac{1}{s_{n+1}}.$$

On a donc

$$\left(\frac{r}{r_n}-1\right)\cdot\left(1-\frac{r}{r_{n+1}}\right)\geqq\frac{1}{r_n}\cdot\frac{1}{s_{n+1}}=\frac{1}{r_n^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}. \tag{14}$$

En tenant compte des inégalités (10), (13) et (14), la relation (9) devient

$$|F^*(r)|>\frac{1}{r_n^2}e^{\left(\frac{1}{\beta}-2\right)(n+1)-\frac{1}{\beta}\lg(n+1)-\frac{2}{\beta}+\frac{1}{\beta}\lg\frac{n}{n+1}}$$

et en vertu de $\frac{1}{\beta}-2=4c$ et (3), on a

$$|F^*(r)|>\frac{1}{r_n^2}e^{4c(n+1)-\frac{1}{\beta}\lg(n+1)-\frac{2}{\beta}+\frac{1}{\beta}\lg\frac{n}{n+1}}>\frac{1}{r_n^2}e^{3c(n+1)}.$$

Corollaire. Soit $n>n_0$ un nombre satisfaisant aux données du théorème I et soit en outre $r_n<n^{\frac{1}{\alpha}}$ (c. à d. $\frac{n^{\frac{1}{\beta}}}{r_n}$ soit situé au dessus de la courbe C); on aura alors pour tout r de l'intervalle

$$r_n+1\leqq r\leqq r_n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}-1$$

(en vertu de (4))

$$|F^*(r)|>e^{2c(n+1)}.$$

Théorème II. *Soit donnés $n>n_0$ et les nombres $t_{n+1}>t_n>0$ tels qu'on ait $t_{n+1}=t_n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ et $t_n<n^{\frac{1}{\alpha}}$. Si une fonction entière $F(r)$ d'ordre ϱ $(0<\varrho<\frac{1}{2})$ vérifie l'inégalité*

$$|F(r)|>e^{c(n+1)}$$

pour tout r de l'intervalle $t_n+1\leqq r\leqq t_{n+1}-1$, on aura pour les mêmes valeurs de r

$$|F(r)|>e^{r^{\varrho-\varepsilon}}.$$

Démonstration. Puisque $t_{n+1}=t_n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ et $t_n<n^{\frac{1}{\alpha}}$, on aura $t_{n+1}<(n+1)^{\frac{1}{\alpha}}$, c. à d. $n+1>t_{n+1}^{\alpha}$. D'autre part on a

$$|F(r)|>e^{c(n+1)};$$

on aura donc, en vertu de $n>n_0$, $r<t_{n+1}$, $\alpha=\varrho-\frac{\delta}{2}$ et $\varrho<\frac{1}{2}$

$$|F(r)|>e^{c(n+1)}>e^{(n+1)^{1-\delta}}>e^{t_{n+1}^{\alpha(1-\delta)}}>e^{r^{\left(\varrho-\frac{\delta}{2}\right)(1-\delta)}}>e^{r^{\varrho-\delta}}$$

en vertu de $\delta < \varepsilon$, on a

$$|F(r)| > e^{r^{\varrho-\varepsilon}}.$$

Lemme III. *Soient deux polynômes à racines réelles et positives*

(5) $$P_r = \left(1-\frac{r}{r_p}\right)\left(1-\frac{r}{r_{p+1}}\right)\ldots\left(1-\frac{r}{r_{q-1}}\right)\left(1-\frac{r}{r_q}\right)$$

$$P_t = \left(1-\frac{r}{r_p}\right)\left(1-\frac{r}{t_{p+1}}\right)\ldots\left(1-\frac{r}{t_{q-1}}\right)\left(1-\frac{r}{r_q}\right).$$

es racines de P_t soient différentes entre elles et rangées par ordre de randeur croissante; les racines extrêmes de P_r coïncident avec les racines ctrêmes de P_t, les autres racines de P_r tombent arbitrairement à l'inté- ieur (au sens large) de l'intervalle $r_p \ldots r_q$. Dans ces conditions il y ura parmi les intervalles $t_\nu \ldots t_{\nu+1}$ au moins un intervalle $t_n \ldots t_{n+1}$ $\nu = p, \ldots, q-1$) [10]) tel que pour $t_n < r < t_{n+1}$ on ait l'inégalité

$$|P_r(r)| \geqq |P_t(r)|.$$

Démonstration. Soit m $(m = q-p+1 \geqq 2)$ le nombre des acines de P_t (c. à d. aussi de P_r). Les racines de P_t déterminent alors -1 intervalles entre r_p et r_q et le polynôme P_t aura là $m-2$ chan- ements de signe. S'il existait à l'intérieur (au sens étroit) de *chacun* es $m-1$ intervalles même un seul point où l'on aurait $|P_r| < |P_t|$, le olynôme $P_t - P_r$ aurait en ces points (qui appartiennent à $m-1$ inter- alles différents) le même signe que P_t. $P_t - P_r$ aurait donc au moins -2 changements de signe, c. à d. au moins $m-2$ racines entre r_p et . Et puisque les valeurs 0, r_p et r_q sont aussi racines de $P_t - P_r$, ce olynôme, qui est évidemment du degré m au plus, aurait au moins $+1$ racines.

4. Le théorème de M. Wiman.

Passons maintenant à la démonstration du théorème de M. Wiman.

Soit $f(z)$ une fonction entière canonique d'ordre ϱ $(0 < \varrho < \frac{1}{2})$ et ε n nombre positif fixe arbitrairement donné; il existe alors une infinité circonférences, concentriques autour de l'origine et de rayons indé- niment croissants, telles que pour tout z sur ces circonférences on ait inégalité

$$|f(z)| > e^{|z|^{\varrho-\varepsilon}}.$$

[10]) Si l'on a $n = p$ ou $n+1 = q$, on entendra par t_p ou t_q les racines extrêmes P_t.

Soit donc la fonction canonique d'ordre ϱ $(0 < \varrho < \frac{1}{2})$

$$f(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right);$$

on aura alors, en posant $|z| = r$ et

$$F(r) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{r}{r_\nu}\right),$$

$$|f(z)| = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left|1 - \frac{z}{z_\nu}\right| \geqq \prod_{\nu=1}^{\infty} \left|1 - \frac{r}{r_\nu}\right| = |F(r)|.$$

On aura donc toujours

$$|f(z)| \geqq |F(r)|.$$

En examinant la suite des zéros de $F(r)$, on verra que les terme $\frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu}$ peuvent finalement être situés tous au dessus de la courbe C de notr diagramme; ou bien il peut y avoir aussi une infinité de nombre $n_1, n_2, \ldots, n_\mu, \ldots$ tels qu'on ait $r_{n_\mu} \geqq n_\mu^{\frac{1}{\alpha}}$. Dans ce dernier cas on aur d'après le lemme II (la suite des n_μ contenant tous les nombres avec l propriété $r_{n_\mu} \geqq n_\mu^{\frac{1}{\alpha}}$).

$$\overline{\lim_{\mu=\infty}} \frac{\lg n_{\mu+1}}{\lg n_\mu} = \lambda > 1.$$

Dans tous les cas, on aura non seulement des termes $\frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu}$ situés isolément a dessus de la courbe C, mais bien (de temps en temps au moins) de suites ininterrompues de termes $\frac{l^{\frac{1}{\beta}}}{r_l}, \ldots, \frac{p^{\frac{1}{\beta}}}{r_p}$ situés tous au dessus de C e telles qu'on ait $\frac{\lg p}{\lg l} > \frac{1}{1-\vartheta}$ avec un $\vartheta(\varepsilon)$ convenablement fixé $(0 < \vartheta < 1)$ Le fait, que de telles suites se présentent de temps en temps, perme d'établir l'inégalité

$$|F(r)| > e^{r^{\varrho-\varepsilon}} \tag{16}$$

pour des valeurs de r de plus en plus grandes.

Déterminons donc une telle suite $\frac{l^{\frac{1}{\beta}}}{r_l}, \ldots, \frac{p^{\frac{1}{\beta}}}{r_p}$, située tout entière a dessus de C et telle qu'on ait $p^{1-\vartheta} > l$. Soit en outre l si grand, qu

négalité $\left(\frac{l}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}} < \frac{1}{2}$ soit verifiée ainsi que $\frac{2}{\beta} l^{-\vartheta} < c$, $l > n_0$ (voir (3),) et (5)) et $\frac{l^{\frac{1}{\beta}}}{r_l} < 1$ $\left(\text{la dernière inégalité en vertu de } \lim_{\nu=\infty} \frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu} = 0\right)$.

Le choix d'un l de plus en plus grand permettra la démonstration e l'inégalité (16) pour des valeurs de r de plus en plus grandes.

Déterminons le terme le plus petit[11]) de notre suite $\frac{l^{\frac{1}{\beta}}}{r_l}, \ldots, \frac{p^{\frac{1}{\beta}}}{r_p}$. Soit $\frac{1}{\beta}$ ce terme. Tirons par le point $\left(m, \frac{m^{\frac{1}{\beta}}}{r_m}\right)$ de notre diagramme une paral- le à l'axe des t. Cette parallèle rencontre les lignes brisées L et L_1 L et L_1 ne sont pas tracées sur otre fig. 2) aux points P et P_1.

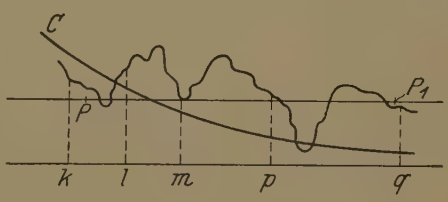

Fig. 2.

oit $\frac{q^{\frac{1}{\beta}}}{r_q}$ le premier terme de la uite $\left(\frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu}\right)$ situé sur L_1 après le oint P_1 et soit $\frac{k^{\frac{1}{\beta}}}{r_k}$ le dernier terme situé sur L avant P. Substituons aux aleurs de r_ν entre r_k (exclusivement) et r_q (inclusivement) des valeurs s_ν telles ue les termes $\frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{s_\nu}$ $(\nu = k+1, \ldots, q)$ soient situés sur ladite parallèle pas- nt par P et P_1. Pour $\nu \leqq k$ et $\nu > q$ on maintiendra les anciens r_ν et on obtiendra ainsi une nouvelle suite qui aura la propriété que chaque - sera $\leqq$ à tout terme qui le précède, et en même temps $\geqq$ à tout rme qui le suit dans cette nouvelle suite. La relation évidente $= \frac{m^{\frac{1}{\beta}}}{r_m}$ permet la détermination explicite des s_ν; nous n'aurons pour- nt besoin que de la remarque que, $\frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{r_\nu}$ (pour $l \leqq \nu \leqq p$) étant situés on au dessous de notre parallèle, on aura $r_\nu \leqq s_\nu$ $(l \leqq \nu \leqq p)$.

[11]) S'il y en a plusieurs, on considérera l'un quelconque d'entre eux.

Décomposons maintenant

$$F(r)=\prod_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{r}{r_\nu}\right)\cdot\prod_{k+1}^{l}\left(1-\frac{r}{r_\nu}\right)\cdot\prod_{l+1}^{p-1}\left(1-\frac{r}{r_\nu}\right)\cdot P_r\cdot\prod_{q+1}^{\infty}\left(1-\frac{r}{r_\nu}\right)$$

et formons

$$F^{**}(r)=\prod_{\nu=1}^{k}\left(1-\frac{r}{r_\nu}\right)\cdot\prod_{k+1}^{l}\left(1-\frac{r}{s_\nu}\right)\cdot\prod_{l+1}^{p-1}\left(1-\frac{r}{s_\nu}\right)\cdot P_s\cdot\prod_{q+1}^{\infty}\left(1-\frac{r}{r_\nu}\right),$$

le polynôme P_r étant défini par (15) et

$$P_s=\left(1-\frac{r}{r_p}\right)\cdot\left(1-\frac{r}{s_{p+1}}\right)\dots\left(1-\frac{r}{s_{q-1}}\right)\cdot\left(1-\frac{r}{r_q}\right).$$

(Remarquons expressément, que la $p^{\text{ème}}$ racine de $F^{**}(r)$ n'est pas s mais r_p).

Le lemme III assure l'existence d'un intervalle $s_n\dots s_{n+1}\,(p\leqq n\leqq q-1$ dans lequel on a $|P_r|\geqq|P_s|$. Dans le cas où cet intervalle serai $r_p\dots s_{p+1}$ ou $s_{q-1}\dots r_q$, nous ne considérerons cependant que l'intervall partiel[12]) $s_p\dots s_{p+1}$ ou $s_{q-1}\dots s_q$.

Posons donc r dans l'intervalle $s_n+1\leqq r\leqq s_{n+1}-1$ et nous auron en vertu de $r_\nu\leqq s_\nu$ (pour $l+1\leqq\nu\leqq p-1$) et $r>r_{p-1}$

$$\prod_{l+1}^{p-1}\left|1-\frac{r}{r_\nu}\right|\geqq\prod_{l+1}^{p-1}\left|1-\frac{r}{s_\nu}\right|.$$

Nous n'avons donc qu'à comparer les produits entre $k+1$ et l. I est facile d'obtenir l'inégalité

$$\prod_{k+1}^{l}\left|1-\frac{r}{r_\nu}\right|>e^{-c(n+1)}\prod_{k+1}^{l}\left|1-\frac{r}{s_\nu}\right|.$$

Nous avons posé $\left(\frac{l}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}}<\frac{1}{2}$; on aura donc aussi, en vertu de $\frac{r_l}{r}<\frac{r_l}{s_p}$ e $\frac{r_l}{s_p}\leqq\left(\frac{l}{p}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, l'inégalité $\frac{r_l}{r}<\frac{1}{2}$. Et puisque $\frac{l^{\frac{1}{\beta}}}{r_l}\geqq\frac{\nu^{\frac{1}{\beta}}}{s_\nu}$ $(\nu=k+1,\dots,q-1$ on aura, en tenant compte de $\frac{1}{\beta}>2>\lg 2$,

---

[12]) On a, en effet, $r_p\leqq s_p$ et $s_q\leqq r_q$ en vertu de $\frac{p^{\frac{1}{\beta}}}{r_p}\geqq\frac{p^{\frac{1}{\beta}}}{s_p}$ et $\frac{q^{\frac{1}{\beta}}}{s_q}\geqq\frac{q^{\frac{1}{\beta}}}{r_q}$.

$$\frac{\prod_{k+1}^{l}\left(\frac{r}{r_\nu}-1\right)}{\prod_{k+1}^{l}\left(\frac{r}{s_\nu}-1\right)} > \frac{\prod_{k+1}^{l}\frac{r}{r_\nu}\cdot\prod_{k+1}^{l}\left(1-\frac{r_\nu}{r}\right)}{\prod_{k+1}^{l}\frac{r}{s_\nu}} = \prod_{k+1}^{l}\left(1-\frac{r_\nu}{r}\right)\cdot\prod_{k+1}^{l}\frac{s_\nu}{r_\nu}$$

$$> \frac{1}{2^{l-k}}\cdot\prod_{k+1}^{l}\left(\frac{\nu}{l}\right)^{\frac{1}{\beta}} > e^{-\frac{2}{\beta}l} > e^{-\frac{2}{\beta}p^{1-\vartheta}}.$$

ais nous avons posé $\frac{2}{\beta}l^{-\vartheta} < c$, c. à d. $\frac{2}{\beta}p^{-\vartheta} < c$, car on a $p > l$; et isque $n \geqq p$, on a

$$\frac{\prod_{k+1}^{l}\left(\frac{r}{r_\nu}-1\right)}{\prod_{k+1}^{l}\left(\frac{r}{s_\nu}-1\right)} > e^{-\frac{2}{\beta}p^{1-\vartheta}} > e^{-cp} > e^{-c(n+1)}.$$

Nous avons donc dans l'intervalle $s_n + 1 \leqq r \leqq s_{n+1} - 1$

$$|F(r)| > |F^{**}(r)|\cdot e^{-c(n+1)}.$$

Désignons maintenant par $F^*(r)$ la fonction que l'on obtient en remaçant dans $F^{**}(r)$ le terme $\left(1-\frac{r}{r_p}\right)$ par $\left(1-\frac{r}{s_p}\right)$. On aura alors pour ut $r > s_p \geqq r_p$ (donc aussi pour nos r)

$$|F^{**}(r)| \geqq |F^*(r)|;$$

l'on a ainsi

$$|F(r)| > |F^*(r)|\, e^{-c(n+1)}.$$

ais la suite des zéros de $F^*(r)$ et notre nombre n repondent aux contions du théorème I et du corollaire. On a donc

$$|F(r)| > e^{2c(n+1)-c(n+1)} = e^{c(n+1)},$$

d'après le théorème II

$$|F(r)| > e^{r^{\varrho-\varepsilon}}.$$

Nous venons de voir que l'inégalité

$$|F(r)| > e^{r^{\varrho-\varepsilon}}$$

est vérifiée dans une infinité d'intervalles de la forme $s_n + 1 \leqq r \leqq s_{n+1} - 1$. Examinons maintenant ces intervalles.

En tenant compte des relations

$$s_{n+1} = s_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$n^{\frac{1}{\beta}} < s_n < n^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$(n+1)^{\frac{1}{\beta}} < s_{n+1} < (n+1)^{\frac{1}{\alpha}},$$

(les inégalités de droite sont vraies, car $\frac{n^{\frac{1}{\beta}}}{s_n}$ et $\frac{(n+1)^{\frac{1}{\beta}}}{s_{n+1}}$ sont situés au dessus de la courbe C), on aura

$$s_{n+1} - s_n = s_n \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} - 1\right) > \frac{s_n}{\beta n} > \frac{n^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta}.$$

En posant $\Delta = s_{n+1} - s_n - 2$, on a, puisque $n > 1$ et $\frac{1}{\beta} > 2$,

$$\Delta > n^{\frac{1}{\beta}-1}.$$

On voit donc que nos intervalles grandissent à l'infini. Posons $r = s_{n+1} - 1$. L'inégalité

$$|F(r)| > e^{r^{\varrho-\varepsilon}}$$

est vérifiée pour cette valeur de r ainsi que dans tout l'intervalle de longueur Δ situé à gauche de cet r. On a

$$\frac{\lg \Delta}{\lg r} > \frac{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\lg n}{\lg s_{n+1}} > \frac{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\lg n}{\frac{1}{\alpha}\lg(n+1)} = \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta} \cdot \frac{\lg n}{\lg(n+1)}.$$

Soit $\eta > 0$ un nombre fixe arbitrairement petit. Posons $\delta < \frac{1}{3}\eta\varrho$ et $\frac{\lg n}{\lg(n+1)} > 1 - \frac{\eta}{2}$, inégalités compatibles avec les restrictions antérieurement imposées à δ et n. On aura

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varrho - \frac{\delta}{2}}{\varrho + \delta} > 1 - \frac{\eta}{2}$$

c'est à dire

$$\frac{\lg \Delta}{\lg r} > \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta} \cdot \frac{\lg n}{\lg(n+1)} > \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)\left(1 - \frac{\eta}{2}\right)(1 - \varrho - \delta) > 1 - \varrho - \eta$$

n a ainsi

$$\Delta > r^{1-\varrho-\eta},$$

l'on peut formuler le théorème de M. Wiman comme suit:

Soit $f(z)$ une fonction canonique d'ordre ϱ $(0 < \varrho < \frac{1}{2})$, $\varepsilon > 0$ et > 0 deux nombres fixes arbitrairement petits. Il existe alors une in-nité de couronnes circulaires, concentriques autour de l'origine et d'épais-ur $\Delta > r^{1-\varrho-\eta}$, r désignant le rayon du contour extérieur de la couronne, telles que pour tout point z de ces couronnes on ait l'inégalité

$$|f(z)| > e^{|z|^{\varrho-\varepsilon}}.$$

Göttingen, mai 1924.

(Eingegangen am 10. Juni 1924.)

Theorie der Abelschen Gruppen.

II. Ideale Gruppen[1]).

Von

Heinz Prüfer in Jena.

§ 1.

In der Mathematik tritt vielfach die Erscheinung auf, daß die Theoreme auf denen unsere Kenntnis gewisser mathematischer Gebilde beruht, ihr Gültigkeit verlieren, wenn die untersuchten Gebilde durch allgemeinere ersetzt werden, daß es aber durch Hinzufügung geeignet definierter ideale Elemente gelingt, die im speziellen Falle bestehende einfache Gesetzmäßigkeit wiederherzustellen. Ich versuche hier, auf diesem Wege die Schwierigkeit die sich in I. § 14[2]) ergab, zu überwinden und die in I. § 12 für Gruppen welche ihr Einheitselement als große Untergruppe enthalten, gefundene Sätze zu verallgemeinern. Das Ziel wird vollständig erreicht bei de Gruppen, in denen es eine nach endlich vielen Gliedern abbrechende Kett von Servanzuntergruppen der in I. § 14 beschriebenen Art gibt. Im al gemeinsten Falle habe ich allerdings nur ein unvollständigeres Result herleiten können.

Ausgehend von einer fest gewählten, aber ganz willkürlichen Gruppe $\mathfrak{U}$ der *Grundgruppe*, definiere ich in einer Weise, die von keiner besondere Darstellung von $\mathfrak{U}$ abhängt, ideale Elemente[3]), die ich zu idealen Schare und idealen Gruppen zusammenfasse. Die Elemente, Scharen und Grupp im Sinne des 1. Teiles dieser Arbeit bezeichne ich, wenn eine solch sprachliche Hervorhebung wünschenswert erscheint, als *real*. Da d Definition der idealen Gebilde allein mit Hilfe der realen großen Unte scharen von $\mathfrak{U}$ erfolgt, sprechen alle Sätze über ideale Gruppen eigentli nur Eigenschaften gewisser realer Unterscharen einer realen Gruppe a

[1]) Fortsetzung der Arbeit in dieser Zeitschrift **20** (1924), S. 165—187.

[2]) In dieser Form zitiere ich den 1. Teil dieser Arbeit.

[3]) Mit den Dedekindschen Idealen haben diese nichts zu tun.

Einer Menge M von großen Unterscharen von $\mathfrak{U}$ wird ein *ideales Element der Grundgruppe* zugeordnet, wenn

1. jede endliche Teilmenge von Scharen aus M einen Durchschnitt besitzt,

2. zu jeder großen Untergruppe von $\mathfrak{U}$ in M eine Nebenschar vorkommt.

Die Menge M soll das *definierende Scharensystem des idealen Elementes* heißen. Verschiedenen Mengen M werden verschiedene ideale Elemente von $\mathfrak{U}$ zugeordnet.

Sind M und N die definierenden Scharensysteme zweier idealer Elemente $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ von $\mathfrak{U}$, so bilden die Produkte der Scharen aus M und N, die Nebenscharen voneinander sind, das definierende Scharensystem eines idealen Elementes $\tilde{C}$ von $\mathfrak{U}$. Ich bezeichne $\tilde{C}$ als das *Produkt der idealen Elemente* $\tilde{A}$ *und* $\tilde{B}$: $\tilde{C} = \tilde{A} \cdot \tilde{B}$. Ist r eine ganze rationale Zahl, so erkläre ich als *Potenz* $\tilde{A}^r$ *des idealen Elementes* $\tilde{A}$ von $\mathfrak{U}$ das ideale Element von $\mathfrak{U}$, dessen definierendes Scharensystem dadurch entsteht, daß jede Schar des $\tilde{A}$ definierenden Systems durch ihre r-te Potenz ersetzt wird.

Auf Grund dieser Definitionen bildet die Gesamtheit der idealen Elemente von $\mathfrak{U}$ eine reale Gruppe. Ihr Einheitselement wird durch das System aller großen Untergruppen von $\mathfrak{U}$ definiert. Gewisse ausgezeichnete Unterscharen dieser Gruppe führe ich als ideale Unterscharen von $\mathfrak{U}$ ein.

Eine Menge M von großen Unterscharen der Grundgruppe möge ein *Scharensystem* heißen, wenn jede endliche Teilmenge von Scharen aus M einen Durchschnitt besitzt. Gibt es überhaupt ideale Elemente von $\mathfrak{U}$, in deren definierenden Scharensystemen M als Teilmenge enthalten ist, so bilden diese eine reale Schar. Diese Schar nenne ich *durch das Scharensystem* M *definiert*. Eine reale Schar der idealen Elemente der Grundgruppe soll nun eine *ideale Unterschar der Grundgruppe* heißen, wenn sie durch ein Scharensystem definiert wird. Jedes ideale Element von $\mathfrak{U}$ ist eine ideale Unterschar von $\mathfrak{U}$. Eine ideale Unterschar von $\mathfrak{U}$, die eine reale Gruppe ist, soll eine *ideale Untergruppe der Grundgruppe* heißen.

Haben die idealen Unterscharen $\tilde{F}_\alpha$ von $\mathfrak{U}$, die durch die Scharensysteme M_α definiert sein mögen, gemeinsame Elemente, so ist die Vereinigungsmenge N der M_α ein Scharensystem und $\Delta \tilde{F}_\alpha$ die durch N definierte ideale Unterschar von $\mathfrak{U}$.

§ 2.

Um über die idealen Unterscharen der Grundgruppe eine Übersicht zu gewinnen, hat man vor allem die Frage zu entscheiden, ob jedes Scharensystem eine ideale Unterschar von $\mathfrak{U}$ definiert und wann durch

verschiedene Scharensysteme dieselbe ideale Schar definiert wird. Weiter muß untersucht werden, ob das Produkt idealer Scharen, das ja, weil die idealen Unterscharen von $\mathfrak{U}$ auch reale Scharen sind, als reale Schar der idealen Elemente von $\mathfrak{U}$ bereits definiert ist, wieder eine ideale Unterschar von $\mathfrak{U}$ wird.

Zur Beantwortung dieser Fragen brauche ich den Wohlordnungssatz, und zwar muß ich die Menge der großen Untergruppen von $\mathfrak{U}$ wohlordnen. Die allgemeine Behandlung der Gruppen mit abzählbar vielen Elementen macht also bereits die Wohlordnung des Kontinuums notwendig.

Jedes Scharensystem ist Teilmenge eines ein ideales Element der Grundgruppe definierenden Scharensystems.

Beweis. Durchläuft F_α die Scharen des gegebenen Scharensystems, so hat man, um ein ideales Element der gesuchten Art zu erhalten, zu jeder großen Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{U}$ eine Nebenschar G so zu bestimmen, daß je endlich viele Scharen F_α und G stets einen Durchschnitt besitzen. Um zu zeigen, daß eine solche Auswahl möglich ist, nehme ich die Menge $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ der großen Untergruppen von $\mathfrak{U}$ als wohlgeordnet an. Ich habe dann unter der Voraussetzung, daß für jede Ordnungszahl $\varrho < \sigma$ eine Nebenschar G_ϱ von $\mathfrak{G}_\varrho$ bereits der Bedingung entsprechend gewählt sei, eine Nebenschar G_σ von $\mathfrak{G}_\sigma$ so zu bestimmen, daß, wenn H_β alle Durchschnitte je endlich vieler Scharen F_α und G_ϱ mit $\varrho < \sigma$ durchläuft, stets $G_\sigma \times H_\beta$ existiert. Als Obergruppe von $\mathfrak{G}_\sigma$ ist die Gruppe

$$\mathfrak{G}'_\sigma = \underset{\beta}{\Delta}\,(H_\beta^0 \cdot \mathfrak{G}_\sigma)$$

bereits der Durchschnitt endlich vieler Gruppen $H_\beta^0 \cdot \mathfrak{G}_\sigma$. Daraus folgt die Existenz von

$$G'_\sigma = \underset{\beta}{\Delta}\,(H_\beta \cdot \mathfrak{G}_\sigma).$$

Man braucht jetzt nur für G_σ ein Element der Schar $G'_\sigma / \mathfrak{G}_\sigma$ zu setzen. Denn da $G_\sigma \leqq H_\beta G_\sigma^{-1} G_\sigma$ und $G_\sigma \leqq G_\sigma H_\beta^{-1} H_\beta$, folgt aus I. § 3, daß $G_\sigma \times H_\beta$ existiert.

Damit ist gezeigt, daß jedes Scharensystem eine ideale Unterschar der Grundgruppe definiert. Doch brauchen verschiedene Scharensysteme nicht verschiedene ideale Unterscharen von $\mathfrak{U}$ zu definieren. Will man zwischen den idealen Unterscharen von $\mathfrak{U}$ und den sie definierenden Scharensystemen eine eineindeutige Beziehung herstellen, so muß man die zugelassenen Scharensysteme einschränken. Unter einem *abgeschlossenen Scharensystem* soll eine solche Menge M von großen Unterscharen der Grundgruppe verstanden werden, welche die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1. Jede endliche Teilmenge von Scharen aus M besitzt einen urchschnitt.

2. Jeder Durchschnitt endlich vieler Scharen aus M gehört zu M.

3. Jede Oberschar einer Schar aus M gehört zu M.

Ist N ein beliebiges Scharensystem, so definiert die Menge der berscharen der Durchschnitte je endlich vieler Scharen aus N offenbar eselbe ideale Schar wie N. Daher besitzt jede ideale Unterschar von U n abgeschlossenes definierendes Scharensystem. Jetzt gilt aber auch:

Jede ideale Unterschar der Grundgruppe besitzt nur ein abgeschlossenes finierendes Scharensystem.

Beweis. In dem abgeschlossenen Scharensystem M komme die in N thaltene Schar F nicht vor. Dann gibt es eine Nebenschar $G \neq F$ von F, elche mit M zusammen ein Scharensystem bildet. Jedes Element der rch dieses definierten idealen Schar ist dann kein Element der durch N finierten idealen Schar.

Das Produkt zweier idealer Unterscharen der Grundgruppe ist wieder ne ideale Unterschar der Grundgruppe. Durchlaufen F_α und G_β die geschlossenen definierenden Scharensysteme für $\tilde{F}$ und $\tilde{G}$, so bilden die odukte $F_\alpha \cdot G_\beta$ das abgeschlossene definierende Scharensystem für $\tilde{F} \cdot \tilde{G}$. genügt auch, die Produkte $F_\alpha \cdot G_\beta$ zu nehmen, deren Faktoren Nebenharen voneinander sind.

Beweis. Sei $\tilde{C}$ ein Element der durch das System der Produkte $\cdot G_\beta$ definierten idealen Unterschar von U. Entnimmt man dem abschlossenen Scharensystem, das $\tilde{C}$ definiert, noch eine Schar C_γ, so enthalten die Scharen $F_\alpha G_\beta$ und C_γ, also auch die Scharen F_α und $G_\beta^{-1} C_\gamma$ meinsame reale Elemente. Alle Scharen F_α und $G_\beta^{-1} C_\gamma$ zusammen bilden mithin ein Scharensystem. Da $G_\beta^{-1} C_\gamma$, läßt man G_β und C_γ variieren, das abgeschlossene $\tilde{G}^{-1} \tilde{C}$ definierende Scharensystem durchläuft. haben e Scharen $\tilde{F}$ und $\tilde{G}^{-1} \tilde{C}$ ein gemeinsames Element $\tilde{A}$. Das Element $\tilde{C}$ das Produkt von $\tilde{A} \leqq \tilde{F}$ und $\tilde{A}^{-1} \tilde{C} \leqq \tilde{G}$.

§ 3.

Durch die Einführung der idealen Elemente sollte eine Erweiterung r Grundgruppe erzielt werden. Daher muß noch eine Zuordnung der alen Elemente und Unterscharen von U zu gewissen idealen Elementen d Scharen angegeben werden.

Die Menge aller Oberscharen einer realen Unterschar F der Grundppe, welche große Unterscharen der letzteren sind, definiert eine ideale nterschar F von U. Diese soll die *zur realen Schar F gehörige ideale nterschar der Grundgruppe* sein. In dem besonderen Fall, daß F ein

Element oder eine Untergruppe von $\mathfrak{U}$ ist, und nur dann, wird $\tilde{F}$ ei ideales Element bzw. eine ideale Untergruppe von $\mathfrak{U}$.

Ob man ein reales Element und das zugehörige ideale Element al identisch betrachten will, ist lediglich eine Frage der Zweckmäßigkeit Hier soll die Identifizierung nicht erfolgen, weil diese ohnehin nur be den Elementen, nicht auch bei den Scharen möglich ist. Denn eine real Schar besteht ja im allgemeinen aus viel weniger Elementen als die z ihr gehörige ideale Schar. Doch will ich hinsichtlich der Bezeichnung ein Festsetzung treffen: Eine reale Schar und die zugehörige ideale Schar be zeichne ich stets mit demselben Symbol. Alle idealen Scharen kennzeichn ich aber, wie bisher schon, durch einen Zirkumflex.

Aus § 2 folgt für reale Unterscharen F_ν der Grundgruppe: $\widetilde{\Pi F_\nu} = \Pi \tilde{F}_\nu$ Insbesondere sind die realen Scharen F und G dann und nur dan Nebenscharen, wenn $\tilde{F}$ und $\tilde{G}$ es sind. Dann und nur dann ist $F \leqq G$ wenn $\tilde{F} \leqq \tilde{G}$. Zur Vereinigungsschar der realen Scharen F_α gehört di kleinste ideale Schar, welche alle $\tilde{F}_\alpha$ enthält.

Dagegen braucht, wenn $F_1, F_2, \ldots$ reale Unterscharen von $\mathfrak{U}$ sin aus der Existenz von $\Delta \tilde{F}_\alpha$ noch nicht die Existenz eines gemeinsame Elementes der F_α zu folgen. Durchlaufen die F_α ein Scharensystem, da die ideale Schar $\tilde{F}$ definiert, so ist ja stets $\tilde{F} = \Delta \tilde{F}_\alpha$. Andererseits besitze wenn ΔF_α vorhanden ist, die $\tilde{F}_\alpha$ zwar stets einen Durchschnitt. Ma kann aber nur schließen, daß $\widetilde{\Delta F_\alpha} \leqq \Delta \tilde{F}_\alpha$ ist. Wichtig ist nun, daß de Satz gilt:

Im Falle endlich vieler F_ν ist $\Delta \tilde{F}_\nu$ nur dann vorhanden, wenn ΔF existiert, und zwar ist dann $\widetilde{\Delta F_\nu} = \Delta \tilde{F}_\nu$.

Beweis. Man kann sich auf den Fall zweier Scharen F_1 und F beschränken. Haben diese Scharen, welche Nebenscharen der Gruppen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_2$ sein mögen, kein gemeinsames Element, so sind nach I. § 3 d Nebenscharen $F_1 \cdot \mathfrak{F}_2$ und $F_2 \cdot \mathfrak{F}_1$ voneinander verschieden. Es gibt dah eine große Untergruppe $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2$ von $\mathfrak{U}$, für welche die Nebenschare $F_1 \cdot \mathfrak{G}$ und $F_2 \cdot \mathfrak{G}$ verschieden sind. Da diese Scharen in den $\tilde{F}_1$ und $\tilde{F}$ definierenden abgeschlossenen Systemen vorkommen, kann $\tilde{F}_1 \times \tilde{F}_2$ nic existieren. — Der 2. Teil des Satzes, der wegen der Eigenschaften d Nebenscharen nur für Gruppen bewiesen zu werden braucht, ergibt sic aus dem letzten der drei folgenden Hilfssätze:

1. Ist $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{F}$ eine große Untergrupp von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{F}$ der Durchschnitt von $\mathfrak{G}$ mit einer großen Untergrupp von $\mathfrak{H}$. Denn durchläuft $\mathfrak{F}_\alpha$ alle großen Untergruppen von $\mathfrak{H}$, in denen enthalten ist, so ist $\mathfrak{F} = \Delta \mathfrak{F}_\alpha = \Delta (\mathfrak{G} \times \mathfrak{F}_\alpha)$ bereits der Durchschnitt endli vieler Gruppen $\mathfrak{G} \times \mathfrak{F}_\alpha$.

2. Sind die Gruppen $\mathfrak{H}/\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{H}/\mathfrak{F}_2$ unabhängig und ist $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ ne große Untergruppe von $\mathfrak{H}$, so kann man zwei große Untergruppen $\mathfrak{F}_1'$ und von $\mathfrak{H}$ so bestimmen, daß $\mathfrak{F}_1' \geqq \mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{F}_1' \times \mathfrak{F}_2'$ wird. Man setze mlich:

$$\mathfrak{F}_1' = \mathfrak{F}_1 \cdot (\mathfrak{G} \times \mathfrak{F}_2), \qquad \mathfrak{F}_2' = \mathfrak{F}_2 \cdot (\mathfrak{G} \times \mathfrak{F}_1).$$

3. Sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ Untergruppen von $\mathfrak{H}$ und ist $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$ eine oße Untergruppe von $\mathfrak{H}$, so gibt es zwei große Untergruppen $\mathfrak{F}_1' \geqq \mathfrak{F}_1$ d $\mathfrak{F}_2' \geqq \mathfrak{F}_2$ von $\mathfrak{H}$, für die $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{F}_1' \times \mathfrak{F}_2'$ wird. Der Beweis ergibt sich rch mehrmalige Anwendung von 1. und 2.

Aus dem hiermit bewiesenen Satze folgt, daß endlich viele Gruppen $/\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}_\nu$ dann und nur dann unabhängig sind, wenn die Gruppen $/\tilde{\mathfrak{E}}$ und $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}_\nu$ es sind.

Enthält die Grundgruppe nur große Untergruppen, so gehört jede eale Unterschar von $\mathfrak{U}$ zu einer realen Unterschar von $\mathfrak{U}$. In diesem I. § 12 behandelten Falle liefert die Einführung der idealen Scharen so keine Erweiterung von $\mathfrak{U}$.

§ 4.

Ich stelle jetzt die Grundeigenschaften der idealen Unterscharen on $\mathfrak{U}$ zusammen. Dabei bezeichne ich diese Scharen, wie schon bisher elegentlich, kurz als ideale Scharen. Ist eine Unterschar der idealen char $\tilde{G}$ selbst eine ideale Schar, so nenne ich sie eine *ausgezeichnete nterschar* von $\tilde{G}$.

I. *Jede ideale Schar ist eine reale Schar.*

II. *Jede ausgezeichnete Unterschar $\tilde{F}$ einer idealen Schar $\tilde{G}$ ist eine ale Unterschar von $\tilde{G}$ und eine ideale Schar. Die ausgezeichneten Unter-haren von $\tilde{F}$ sind die ausgezeichneten Unterscharen von $\tilde{G}$, welche Unter-haren von $\tilde{F}$ sind.*

III. *Jede ideale Schar $\tilde{G}$ ist eine ausgezeichnete Unterschar von sich lbst. Jedes Element von $\tilde{G}$ ist eine ausgezeichnete Unterschar von $\tilde{G}$.*

IV. *Haben ausgezeichnete Unterscharen einer Schar $\tilde{G}$ gemeinsame lemente, so bilden diese eine ausgezeichnete Unterschar von $\tilde{G}$.*

V. *Durchlaufen $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ die Elemente ausgezeichneter Unterscharen ner idealen Schar $\tilde{G}$, so durchläuft $\tilde{A}\tilde{B}^{-1}\tilde{C}$ ebenfalls die Elemente ner ausgezeichneten Unterschar von $\tilde{G}$.*

Hieraus folgt, daß jede Nebenschar einer ausgezeichneten Unterschar ieder eine ausgezeichnete Unterschar ist.

VI. *Ist $\tilde{F}$ eine ausgezeichnete große Unterschar der idealen Schar $\tilde{G}$,) ist jede Schar, welche Oberschar von $\tilde{F}$ und Unterschar von $\tilde{G}$ ist, eine usgezeichnete Unterschar von $\tilde{G}$.*

Beweis. Mit Rücksicht auf die für Nebenscharen geltenden Sätze kann man annehmen, daß $\tilde{F} = \tilde{\mathfrak{F}}$ und $\tilde{G} = \tilde{\mathfrak{G}}$ Gruppen sind. Durchläuft $\mathfrak{F}_\alpha$ die Gruppen des $\tilde{\mathfrak{F}}$ definierenden abgeschlossenen Systems, so ist $\tilde{\mathfrak{F}} = \Delta(\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha \times \tilde{\mathfrak{G}})$. Soll $\tilde{\mathfrak{F}}$ eine große Untergruppe von $\tilde{\mathfrak{G}}$ sein, so muß $\tilde{\mathfrak{F}}$ mit dem Durchschnitt endlich vieler $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha \times \tilde{\mathfrak{G}}$, also für eine gewisse Gruppe $\mathfrak{F}_\alpha = \mathfrak{H}$, mit $\tilde{\mathfrak{G}} \times \tilde{\mathfrak{H}}$ übereinstimmen. Ist nun $\mathfrak{G}^*$ eine Gruppe, für welche $\tilde{\mathfrak{G}} \times \tilde{\mathfrak{H}} \leqq \mathfrak{G}^* \leqq \tilde{\mathfrak{G}}$, so ist zu zeigen, daß $\mathfrak{G}^*$ eine ausgezeichnete Untergruppe von $\tilde{\mathfrak{G}}$ ist. Die Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}^* \cdot \tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{H}}$ sind Nebenscharen von $\tilde{\mathfrak{H}}$ und gehören als solche zu Nebenscharen von $\mathfrak{H}$. Daraus folgt, daß es eine Gruppe $\mathfrak{H}^*$ gibt, für die $\mathfrak{G}^* \cdot \tilde{\mathfrak{H}} = \widetilde{\mathfrak{H}^*}$, mithin $\mathfrak{G}^* = \tilde{\mathfrak{G}} \times \widetilde{\mathfrak{H}^*}$ wird.

VII. *Jede ausgezeichnete Unterschar der idealen Schar $\tilde{G}$ ist der Durchschnitt ausgezeichneter großer Unterscharen von $\tilde{G}$.*

Beweis. Man braucht nur zu zeigen: Ist $\tilde{\mathfrak{F}}$ eine ausgezeichnete Untergruppe von $\tilde{\mathfrak{G}}$ und $\tilde{\mathfrak{G}}$ eine ideale Untergruppe von $\mathfrak{U}$, ist ferner $\mathfrak{H}$ eine Gruppe aus einem $\tilde{\mathfrak{F}}$ definierenden Scharensystem, so ist $\tilde{\mathfrak{G}} \times \tilde{\mathfrak{H}}$ eine große Untergruppe von $\tilde{\mathfrak{G}}$. Das folgt aber daraus, daß die reale Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{\mathfrak{G}} \times \tilde{\mathfrak{H}}$ zu $\tilde{\mathfrak{G}} \cdot \tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{H}}$ isomorph ist.

VIII. *Besitzt jede endliche Teilmenge einer Menge ausgezeichneter Unterscharen einer idealen Schar einen Durchschnitt, so besitzt die ganze Menge einen Durchschnitt.*

Beweis. Werden die idealen Scharen $\tilde{F}_\alpha$ durch die Scharensysteme M_α definiert, so existiert $\Delta \tilde{F}_\alpha$ dann und nur dann, wenn jede endliche Menge von Scharen, die irgendwelchen Mengen M_α entnommen sind, einen Durchschnitt besitzt.

Man kann Satz VIII auch in der Form aussprechen: Sind $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \ldots$ ideale Elemente, $\tilde{\mathfrak{F}}_1, \tilde{\mathfrak{F}}_2, \ldots$ ideale Untergruppen von $\mathfrak{U}$, so ist das Kongruenzensystem

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \tilde{E}_1 (\tilde{\mathfrak{F}}_1), \\ \tilde{X} &= \tilde{E}_2 (\tilde{\mathfrak{F}}_2), \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

durch ein ideales Element von $\mathfrak{U}$ lösbar, wenn nur jedes endliche Teilsystem eine Lösung hat.

Die Sätze I.—VII. gelten auch in jeder realen Gruppe, wenn man alle ihre Unterscharen als ausgezeichnet betrachtet. Dagegen ist VIII. nicht für alle realen Gruppen richtig. Das Bestreben, diesem Satze allgemeine Gültigkeit zu verschaffen, war nach der Erfahrung von I. § 14 der Leitgedanke bei der Definition der idealen Elemente und Scharen.

§ 5.

Aus den Sätzen I.—VIII. lassen sich die weiteren Eigenschaften der ealen Unterscharen einer Grundgruppe herleiten. Ich will deshalb die engen von Elementen, für welche diese Sätze gelten, hier axiomatisch tersuchen. Um nicht noch einen besonderen Namen einzuführen, nenne auch diese axiomatisch definierten Mengen ideale Scharen, obwohl der gentliche Grund für diese Bezeichnung hier fortfällt. *Ideale Scharen* d also von jetzt an Mengen von Elementen mit gewissen ausgezeichneten ilmengen, welche den Postulaten I.—VIII. in § 4 genügen. Die Unabngigkeit der Postulate untersuche ich hier nicht.

Alle Schlüsse in I. §§ 3—6 lassen sich durchführen, wenn man an elle der realen Scharen ideale Scharen betrachtet und als Unterscharen r die ausgezeichneten Unterscharen zuläßt. (Als ausgezeichnete Unternaren eines Komplementes $\tilde{H}/\tilde{F}$ haben die Scharen $\tilde{G}/\tilde{F}$ zu gelten, für lche $\tilde{G}$ eine ausgezeichnete Unterschar von $\tilde{H}$ ist.) Das folgt bereits aus n Postulaten I.—V. Alle dort definierten Begriffe lassen sich auch hier enso definieren. Doch soll diese Übertragung der Definitionen beim griff der isomorphen Gruppen und Scharen nicht geschehen.

Man wird nämlich nicht schon dann zwei ideale Scharen oder Gruppen omorph nennen, wenn es eine Abbildung der Scharen (Gruppen) aufnander gibt, bei der Produkte aus entsprechenden Elementen sich wieder tsprechen. Zwei ideale Scharen (Gruppen) sollen nur dann *isomorph* er vom gleichen *Typus* heißen, wenn eine solche Abbildung existiert, i der außerdem jeder ausgezeichneten Unterschar der einen Schar (Gruppe) ne ausgezeichnete Unterschar der andern Schar (Gruppe) entspricht.

Berücksichtigt man, daß jede Nebenschar einer ausgezeichneten Unternar wieder eine ausgezeichnete Unterschar ist, so folgt aus der Definition nächst, daß sich die in I. § 5 aufgestellten Sätze über Isomorphismen f ideale Scharen und Gruppen übertragen. Weiter sind die idealen ruppen $\tilde{\mathfrak{F}}\cdot\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{\mathfrak{F}}$ und $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{\mathfrak{F}}\times\tilde{\mathfrak{G}}$ stets isomorph. Zum Beweise braucht man r die Scharen F und G einander zuzuordnen, für die $F = G\cdot\tilde{\mathfrak{F}}$ und $= F\times\tilde{\mathfrak{G}}$ ist.

Da die Sätze 1.—3. in I. § 11 ohne weiteres auch für große Unternaren einer Schar gelten, schließt man aus IV., daß jeder vorhandene rchschnitt endlich vieler ausgezeichneter großer Unterscharen einer idealen har $\tilde{G}$ wieder eine ausgezeichnete große Unterschar von $\tilde{G}$ ist. Aus VI. d VII. folgt dann, daß für jede ausgezeichnete Unterschar $\tilde{F}$ von $\tilde{G}$ ein *geschlossenes, $\tilde{F}$ definierendes Scharensystem* existiert, das aus auszeichneten großen Unterscharen von $\tilde{G}$ besteht und den Bedingungen —3. in § 2 genügt. Aus VIII. folgt, wie in § 2, daß verschiedene

solche Scharensysteme stets verschiedene ausgezeichnete Unterscharen von $\tilde{G}$ definieren.

Hieraus ergibt sich, daß zwei ideale Scharen (Gruppen) isomorph sind, wenn ihre ausgezeichneten großen Unterscharen sich einander eindeutig so zuordnen lassen, daß Durchschnitte und Produkte aus entsprechenden Scharen sich wieder entsprechen. Bei der Produktbildung kann man sich dabei noch auf Produkte aus Nebenscharen beschränken.

Aus diesem Kriterium folgt: Ist $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{F}}$ der direkte Durchschnitt der idealen Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}_\nu$ und $\tilde{\mathfrak{H}}'/\tilde{\mathfrak{F}}'$ der direkte Durchschnitt der idealen Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}'/\tilde{\mathfrak{G}}'_\nu$, so sind die idealen Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{F}}$ und $\tilde{\mathfrak{H}}'/\tilde{\mathfrak{F}}'$ isomorph, wenn für jedes ν die idealen Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}_\nu$ und $\tilde{\mathfrak{H}}'/\tilde{\mathfrak{G}}'_\nu$ isomorph sind. Eine Zuordnung der ausgezeichneten großen Unterscharen von $\tilde{\mathfrak{H}}$ und $\tilde{\mathfrak{H}}'$, an der man dies erkennt, ergibt sich von selbst.

Hiermit sind die Hilfsmittel zur Übertragung aller Sätze in I §§ 3—6 auf ideale Scharen und Gruppen geliefert.

Ich zeige jetzt noch, daß der axiomatisch eingeführte Begriff der idealen Schar in Ansehung des auf die Untersuchung realer Gruppen gerichteten eigentlichen Zweckes der idealen Scharen nicht zu weit ist. Es gilt nämlich der Satz:

Jede ideale Gruppe ist isomorph zu dem Komplement einer idealen Untergruppe einer geeignet gewählten Grundgruppe in der zu dieser gehörigen idealen Gruppe.

Beweis. Es sei $\tilde{\mathfrak{H}}$ die gegebene ideale Gruppe. Dann ist $\tilde{\mathfrak{H}}$ zugleich eine reale Gruppe. Als solche bezeichne ich $\tilde{\mathfrak{H}}$ mit $\mathfrak{H}^*$. Die Gruppe $\mathfrak{H}^*$ wähle ich als Grundgruppe. Durchläuft $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^*$ alle ausgezeichneten großen Untergruppen von $\tilde{\mathfrak{H}}$, so definiert die Menge der $\mathfrak{G}^*$ eine ideale Untergruppe $\tilde{\mathfrak{E}}^*$ der Grundgruppe $\mathfrak{H}^*$. Man braucht jetzt nur jeder ausgezeichneten großen Unterschar $\tilde{G} = G^*$ von $\tilde{\mathfrak{H}}$ die ideale Schar $\widetilde{G^*}$ zuzuordnen, um zu erkennen, daß die idealen Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}$ und $\widetilde{\mathfrak{H}^*}/\tilde{\mathfrak{E}}^*$ isomorph sind.

Da in den weiteren Untersuchungen nicht ausgezeichnete Unterscharen idealer Scharen nicht vorkommen werden, soll in Zukunft der Zusatz „ausgezeichnet“ ganz unterdrückt werden. Auch bei Begriffen wie „Vereinigungsschar von idealen Scharen“ und „direkter Faktor einer idealen Gruppe“ hat man stets daran zu denken, daß nur die ausgezeichneten Unterscharen berücksichtigt werden.

§ 6.

Zu derselben realen Gruppe $\mathfrak{G}$ können viele ideale Gruppen gehören. Zunächst kann man immer $\mathfrak{G}$ selbst als Grundgruppe wählen. Man erhält

nn eine zu $\mathfrak{G}$ gehörige ideale Gruppe. Aber $\mathfrak{G}$ kann auch Untergruppe er realen Gruppe $\mathfrak{H}$ sein. Wählt man $\mathfrak{H}$ als Grundgruppe, so gibt es e zu $\mathfrak{G}$ gehörige ideale Untergruppe dieser Gruppe. Weiter kann das nheitselement $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'/\mathfrak{E}$ eine Untergruppe einer Gruppe $\mathfrak{H}$ sein. nn gehören zu $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{E}$ zwei ideale Untergruppen der Grundgruppe $\mathfrak{H}$. s Komplement $\widetilde{\mathfrak{G}'/\mathfrak{E}}$ wird man auch als zu $\mathfrak{G}$ gehörige ideale Gruppe zeichnen müssen.

Die so erhaltenen idealen Gruppen sind natürlich nicht identisch. sind ja ganz verschieden definiert. Wohl aber wird man fragen, ob h diese idealen Gruppen durch irgendeine abstrakt definierbare Eigenaft unterscheiden können, oder ob sie isomorph sein müssen. Diese age hat deshalb eine besondere Bedeutung, weil man nur im letzteren lle berechtigt ist zu sagen, daß jeder realen Gruppe durch die hier entckelte Theorie eine ideale Gruppe zugeordnet wird, die von jeder Darllung der realen Gruppe unabhängig ist. Das ist wirklich der Fall. Es steht der Satz:

Zu isomorphen realen Gruppen gehören stets isomorphe ideale uppen.

Beweis. Ist $\mathfrak{H} \geqq \mathfrak{G} \geqq \mathfrak{E}$, so erhält man zwei zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{E}$ gehörige ideale uppen, wenn man einmal $\mathfrak{H}$, dann $\mathfrak{G}/\mathfrak{E}$ selbst als Grundgruppe nimmt. n ändert sich der Typus von $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{\mathfrak{E}}$ sicher nicht, wenn die Grundgruppe $\mathfrak{H}$ rch $\mathfrak{H}/\mathfrak{E}$ ersetzt wird. Man darf daher die die Ausdrucksweise verein-hende Voraussetzung machen, daß $\mathfrak{E}$ das Einheitselement von $\mathfrak{H}$ ist. ; M ein abgeschlossenes Scharensystem in $\mathfrak{H}$, das die ideale Schar $\tilde{F} \leqq \tilde{\mathfrak{G}}$ finiert, so enthält M alle großen Untergruppen von $\mathfrak{H}$, die Obergruppen n $\mathfrak{G}$ sind. Ist weiter G eine große Unterschar von $\mathfrak{G}$, so besteht nach lfssatz 1 in § 3 für eine große Unterschar H von $\mathfrak{H}$ die Gleichung $\times \mathfrak{G} = G$. Die Menge dieser Scharen H sei $\mathsf{K}(G)$. Enthält nun M die har H, so enthält M nach Hilfssatz 3 in § 3 jede Schar aus $\mathsf{K}(G)$. Der nge M von Scharen H wird eine Menge M' von Scharen $G = H \times \mathfrak{G}$ geordnet. Die Menge M' bildet in bezug auf die Grundgruppe $\mathfrak{G}$ ein geschlossenes, eine ideale Schar $\tilde{F}'$ definierendes Scharensystem. Man rennt weiter, daß auch umgekehrt jeder Menge M' eine und nur eine nge M entspricht und daß bei der hierdurch hergestellten Zuordnung r idealen Scharen $\tilde{F}$ und $\tilde{F}'$ Durchschnitte und Produkte entsprechender haren sich wieder entsprechen.

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht.

§ 7.

Der Begriff des direkten Durchschnitts läßt sich auf unendlich viel ideale Gruppen ausdehnen. Die idealen Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}_\alpha$ nenne ich *unabhängig* und $\tilde{\mathfrak{H}}/\Delta\,\tilde{\mathfrak{G}}_\alpha$ ihren *direkten Durchschnitt*, wenn jede Menge ideale Scharen, die aus je einem Element jeder der Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}_\alpha$ besteht, einen Durchschnitt besitzt. Wegen des Definitionspostulates VIII. der idealen Scharen sind die Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}_\alpha$ dann und nur dann unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge der Gruppen es ist. Der Typus des direkten Durchschnitts der idealen Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}_\alpha$ ist durch die Typen der Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}_\alpha$ eindeutig bestimmt. Denn jede große Untergruppe von $\tilde{\mathfrak{H}}$, die Obergruppe von $\Delta\,\tilde{\mathfrak{G}}_\alpha$ ist, ist bereits Obergruppe des Durchschnitts endlich vieler $\tilde{\mathfrak{G}}_\alpha$.

Der Begriff des direkten Durchschnitts unendlich vieler idealer Gruppen entspricht nicht vollständig dem in I. § 7 definierten uneigentlichen direkten Produkt unendlich vieler realer Gruppen. Denn ist $\mathfrak{H}$ das uneigentliche direkte Produkt der Gruppen $\mathfrak{F}_\alpha$ mit dem Einheitselement $\mathfrak{E}$ und ist $\mathfrak{G}_\beta$ die Vereinigungsgruppe aller $\mathfrak{F}_\alpha$ mit Ausnahme von $\mathfrak{F}_\beta$, so sind zwar die idealen Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}_\beta$ unabhängig, im allgemeinen ist aber $\Delta\,\tilde{\mathfrak{G}}_\beta > \tilde{\mathfrak{E}}$. Sind umgekehrt für die unendlich vielen Untergruppen $\mathfrak{G}_\beta$ der realen Gruppe $\mathfrak{H}$ die idealen Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}_\beta$ unabhängig, ist ferner $\Delta\,\mathfrak{G}_\beta = \mathfrak{E}$ das Einheitselement von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{F}_\alpha = \underset{\alpha \neq \beta}{\Delta}\,\mathfrak{G}_\beta$, so ist im allgemeinen $\Delta\,\tilde{\mathfrak{G}}_\beta > \tilde{\mathfrak{E}}$. Ist dies der Fall, so braucht die Vereinigungsgruppe der $\mathfrak{F}_\alpha$ kein uneigentliches direktes Produkt zu sein. Der Ausnahmefall daß $\Delta\,\tilde{\mathfrak{G}}_\beta = \tilde{\mathfrak{E}}$ wird, tritt überhaupt nur dann ein, wenn Elemente derselben Ordnung stets nur in endlich vielen Gruppen $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}_\beta$ enthalten sind, wenn also die $\mathfrak{F}_\alpha$ im wesentlichen die direkten Faktoren im Satze in I. § 7 sind.

Eine ideale Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}$ soll eine *zur Primzahl p gehörige primäre ideale Gruppe* heißen, wenn für jede große Untergruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$ von $\tilde{\mathfrak{H}}$ die reale Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}$ eine zur Primzahl p gehörige primäre Gruppe ist.

Aus dem Satz am Anfang von I. § 12 ergibt sich sofort:

Theorem I. *Jede ideale Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}$ ist auf eine einzige Weise als der direkte Durchschnitt von primären idealen Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{E}}_p$, von denen zu jeder Primzahl genau eine gehört, darstellbar. Jede Unterschar $\tilde{G}$ von $\tilde{\mathfrak{H}}$ ist der Durchschnitt von idealen Scharen $\tilde{G}_p$, für welche $\tilde{G}_p/\tilde{\mathfrak{E}}_p \leqq \tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{E}}_p$.*

Ich nenne $\tilde{G}_p$ die *p-Komponente* von $\tilde{G}$. Das Produkt der p-Komponenten zweier idealer Scharen ist die p-Komponente des Produktes der Scharen.

§ 8.

Die bisherigen Untersuchungen wende ich auf den Modul der ratio-
len Zahlen an.

Ist p eine Primzahl und k eine positive oder negative ganze Zahl,
möge $[p^k]$ den realen Modul bezeichnen, den die Zahlen $\frac{a}{b}p^k$ bilden,
nn a alle ganzen Zahlen, b alle ganzen, nicht durch p teilbaren Zahlen
rchläuft. Bezeichnet man noch den Modul aller rationalen Zahlen mit
$-\infty]$, so sind die Moduln $[p^k]$ genau die großen Untermoduln von
$-\infty]$ mit primärem, zur Primzahl p gehörigem Komplement $[p^{-\infty}]/[p^k]$.
r Durchschnitt der idealen Moduln $\overline{[p^k]}$ bei festem p sei $\overline{[p^{+\infty}]}$. Dann
d die idealen Moduln eineindeutig in der Form $\underset{p}{\Delta}\overline{[p^k]}$ darstellbar, wenn
r Durchschnitt über alle Primzahlen p erstreckt wird und für k außer
n ganzen rationalen Zahlen noch die Werte $+\infty$ und $-\infty$ zugelassen
rden. Dann und nur dann ist $\tilde{a} \geqq \tilde{b}$, wenn die zu $\tilde{a}$ gehörigen Ex-
nenten k für jedes p höchstens gleich den zu $\tilde{b}$ gehörigen sind. Zu
iem realen Modul gehört der ideale Modul $\Delta\overline{[p^k]}$, wenn kein Exponent
ich $+\infty$ und nur endlich oft $k > 0$ ist. Dazu kommt noch der Modul
$= \Delta\overline{[p^{+\infty}]}$, der zum realen Modul 0 gehört.

Die Addition der *idealen rationalen Zahlen*[4]) — so nenne ich die
alen Elemente des Moduls der rationalen Zahlen — ist durch § 1 erklärt.
an kann aber auch eine Multiplikation der idealen Zahlen definieren.
t nämlich $\mathfrak{a} = \Delta[p^k]$ ein realer großer Untermodul des Moduls aller
tionalen Zahlen und sind $\tilde{r}$ und $\tilde{s}$ zwei ideale Zahlen, so ist die Ver-
nigungsschar aller Produkte zweier realer Zahlen aus den Nebenscharen
n $\mathfrak{a}$, zu denen $\tilde{r} + \tilde{\mathfrak{a}}$ und $\tilde{s} + \tilde{\mathfrak{a}}$ gehören, Nebenschar eines gewissen,
s $\tilde{r}$, $\tilde{s}$ und $\mathfrak{a}$ leicht zu berechnenden Moduls $\mathfrak{b}$. Läßt man $\mathfrak{a}$ variieren,
bilden die erhaltenen Nebenscharen der Moduln $\mathfrak{b}$ ein Scharensystem,
s eine und nur eine ideale Zahl definiert. Diese nenne ich das *Produkt*
r *idealen Zahlen* $\tilde{r}$ und $\tilde{s}$. Die Multiplikation ist kommutativ, assoziativ
d gegen die Addition distributiv.

Will man eine Übersicht über die idealen Zahlen gewinnen, so genügt
die Komponenten nach den einzelnen Primzahlen, also die Nebenscharen
r idealen Moduln $\overline{[p^{+\infty}]}$, zu untersuchen. Sieht man von diesem Modul
bst, der die Rolle der Null spielt, ab, so ist jede Nebenschar von $\overline{[p^{+\infty}]}$
finiert durch ein Kongruenzensystem:

[4]) Die Dedekindschen Ideale sind nicht die idealen Zahlen, sondern die realen
duln.

$$
\begin{aligned}
&x \equiv 0 && ([p^l]),\\
&x \equiv a_0 p^l && ([p^{l+1}]),\\
&x \equiv a_0 p^l + a_1 p^{l+1} && ([p^{l+2}]),\\
&x \equiv a_0 p^l + a_1 p^{l+1} + a_2 p^{l+2} && ([p^{l+3}]),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Diese Darstellung ist eindeutig, wenn man noch festsetzt, daß für jedes a_i eine der Zahlen $0, 1, \ldots, p-1$ genommen wird und daß $a_0 \neq 0$ sein soll[5]). Die definierenden Kongruenzensysteme für Summe und Produkt zweier idealer Zahlen $\tilde{r}$ und $\tilde{s}$ erhält man, indem man die rechten Seiten der $\tilde{r}$ und $\tilde{s}$ definierenden Kongruenzen in der gewöhnlichen Weise addiert und multipliziert. Die p-Komponente nicht nur der Summe, sondern auch des Produktes von $\tilde{r}$ und $\tilde{s}$ ist nur von den p-Komponenten dieser Zahlen abhängig. Man kann daher das Produkt von Nebenscharen von $\overbrace{[p^{+\infty}]}$ definieren. Die Division ist dann, wenn der Divisor nicht gerade der Modul $\overbrace{[p^{+\infty}]}$ selbst ist, stets, und zwar eindeutig, ausführbar. Die p-Komponenten der idealen Zahlen bilden demnach einen Körper.

Die idealen Zahlen selbst bilden keinen Körper, sondern nur einen Ring. Es gibt nämlich ideale Zahlen, sogenannte Nullteiler, die, obwohl sie selbst nicht gleich $\tilde{0}$ sind, doch durch Multiplikation mit einer von $\tilde{0}$ verschiedenen idealen Zahl zu $\tilde{0}$ gemacht werden können. Eine ideale Zahl ist dann und nur dann ein Nullteiler, wenn mindestens für eine Primzahl p der Modul $\overbrace{[p^{+\infty}]}$ ihre p-Komponente ist. Die Division durch eine ideale Zahl, welche kein Nullteiler ist, ist stets möglich.

Die Elemente des zum Modul der ganzen rationalen Zahlen gehörigen idealen Moduls, also die idealen rationalen Zahlen, die in $\Delta\overbrace{[p^0]}$ enthalten sind, nenne ich *ideale ganze Zahlen*. Das Produkt ganzer idealer Zahlen ist wieder eine ganze ideale Zahl. Jede rationale ideale Zahl ist der Quotient zweier ganzer idealer Zahlen, von denen der Nenner kein Nullteiler ist. Jeder ganze ideale Modul besteht aus den ganzzahligen Vielfachen einer idealen Zahl. Man kann daher die aus der elementaren Zahlentheorie geläufigen Begriffe, wie den des größten gemeinsamen Teilers auf die idealen rationalen Zahlen übertragen.

Der Gedanke liegt nahe, bei der Definition der ganzen idealen Zahlen den Modul der ganzen Zahlen als Grundgruppe zu benutzen. In § 6 ist gezeigt, daß die idealen Zahlen, die man so erhält, den oben definierten

[5]) Die p-Komponenten der idealen Zahlen stimmen völlig mit den von Herrn Hensel eingeführten p-adischen Zahlen überein. Vgl. K. Hensel, Theorie der algebraischen Zahlen I (1908), 2. Kap. Eine ideale Zahl ist äquivalent zu einem System von je einer p-adischen Zahl für jede Primzahl p.

ganzen idealen Zahlen umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können und daß bei dieser Zuordnung die Summen entsprechender Zahlen sich wieder entsprechen und die idealen Moduln aufeinander abgebildet werden. Man erkennt leicht, daß auch die Multiplikation bei beiden Definitionen dieselben Resultate liefert.

§ 9.

Ist $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \ldots$ eine Menge von Elementen einer idealen Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}$, so gibt es eine Untergruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$ von $\tilde{\mathfrak{H}}$, welche alle Elemente der Menge enthält und kleiner ist als jede andere die Elemente enthaltende Untergruppe von $\tilde{\mathfrak{H}}$. Die ideale Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$ soll die durch die Elemente $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \ldots$ *erzeugte* Untergruppe von $\tilde{\mathfrak{H}}$ heißen und mit $\mathrm{grp}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \ldots)$ bezeichnet werden.

Ist $\tilde{F}$ eine große Unterschar von $\tilde{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{a}$ die Ordnung von $\tilde{F}$ in der idealen Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{F}$, so ist $\tilde{F}^s = \tilde{F}^t$, wenn $s = t(\mathfrak{a})$. Genügt die ideale ganze Zahl $\tilde{r}$ der Kongruenz $\tilde{r} \equiv \tilde{s}(\tilde{\mathfrak{a}})$, so soll $\tilde{F}^{\tilde{r}} = \tilde{F}^{s}$ sein. Dadurch ist jede Potenz von $\tilde{F}$ mit idealem ganzzahligem Exponenten erklärt. Durchläuft $\tilde{F}$ alle großen Unterscharen von $\tilde{\mathfrak{G}}$, welche Oberscharen eines Elementes $\tilde{E}$ sind, so haben die Scharen $\tilde{F}^{\tilde{r}}$ für jedes ganze ideale $\tilde{r}$ ein Element $\tilde{E}'$ von $\tilde{\mathfrak{G}}$ zum Durchschnitt. Ich definiere $\tilde{E}'$ als die *Potenz* $\tilde{E}^{\tilde{r}}$ von $\tilde{E}$.

Die gewöhnlichen Rechenregeln

$$\tilde{E}^{\tilde{r}} \cdot \tilde{E}^{\tilde{s}} = \tilde{E}^{\tilde{r}+\tilde{s}}, \qquad (\tilde{E}^{\tilde{r}})^{\tilde{s}} = \tilde{E}^{\tilde{r}\tilde{s}}, \qquad \Pi \tilde{E}_\nu^{\tilde{r}} = (\Pi \tilde{E}_\nu)^{\tilde{r}}$$

gelten. Ferner wird

$$\Delta \tilde{G}_\alpha^{\tilde{r}} = (\Delta \tilde{G}_\alpha)^{\tilde{r}},$$

vorausgesetzt, daß die rechte Gleichungsseite einen Sinn hat.

Dann und nur dann ist $\tilde{E}^{\tilde{r}} = \tilde{E}^{\tilde{s}}$, wenn, in der obigen Bezeichnung, $\tilde{r} \equiv \tilde{s}(\Delta \tilde{\mathfrak{a}})$. Ich zeige, daß $\mathrm{grp}\,\tilde{E}$ zu mod $\tilde{1}/\Delta\tilde{\mathfrak{a}}$ isomorph ist. Dazu ist zu beweisen: Jedes Element von $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathrm{grp}\,\tilde{E}$ ist eine Potenz von $\tilde{E}$. Ist nämlich $\tilde{F} \geqq \tilde{E}$ eine große Unterschar von $\tilde{\mathfrak{G}}$, so ist $\tilde{F} + \tilde{F}^0$, und die Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{F}$ wird durch $\tilde{F}$ erzeugt. Ist $\tilde{E}'$ ein Element aus $\mathrm{grp}\,\tilde{E}$ und $\tilde{F}' \geqq \tilde{E}'$ Nebenschar von $\tilde{F}$, so ist daher $\tilde{F}' = \tilde{F}^{\tilde{s}}$. Als Exponenten $\tilde{s}$ kann man dabei jede Zahl einer Schar wählen. Diese Scharen haben, läßt man $\tilde{F}$ variieren, zu je endlich vielen einen Durchschnitt. Es gibt daher eine ideale ganze Zahl $\tilde{r}$, die in allen Scharen enthalten ist. Für sie wird $\tilde{E}' = \tilde{E}^{\tilde{r}}$.

Da $\mathrm{grp}(\tilde{A}, \tilde{B}, \ldots)$ die Vereinigungsgruppe von $\mathrm{grp}\,\tilde{A}, \mathrm{grp}\,\tilde{B}, \ldots$, also bei endlich vielen erzeugenden Elementen das Produkt dieser Gruppen ist, folgt: Eine durch endlich viele Elemente erzeugte ideale Gruppe besteht

aus den Produkten von Potenzen dieser Elemente. Auf unendlich viele erzeugende Elemente läßt sich dieser Satz nicht übertragen.

Eine, nicht nur aus dem Einheitselement bestehende, Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$ soll eine ideale Gruppe *vom Range* 1 heißen, wenn sie zu einer Gruppe $\tilde{\mathfrak{a}}/\tilde{\mathfrak{b}}$, wo $\tilde{\mathfrak{a}}$ und $\tilde{\mathfrak{b}}$ Moduln, isomorph ist. Mit Hilfe von Theorem I erkennt man leicht, daß $\tilde{\mathfrak{G}}$ dann und nur dann eine ideale Gruppe vom Range 1 ist, wenn jedes Paar von Elementen aus $\tilde{\mathfrak{G}}$ in einer durch ein Element erzeugten Untergruppe von $\tilde{\mathfrak{G}}$ enthalten ist.

§ 10.

Ordnung und Höhe eines Elementes $\tilde{A}$ einer idealen Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$ sind, da $\tilde{\mathfrak{G}}$ auch eine reale Gruppe ist, eigentlich schon durch I. § 8 definiert. Nachdem aber Potenzen mit beliebigen idealen Exponenten eingeführt sind, erscheint es natürlich, Ordnung und Höhe nicht als reale, sondern als ideale Moduln zu erklären. Die Definitionen ergeben sich aus I. § 8, wenn man dort überall an Stelle der Potenzen mit realen Exponenten solche mit idealen Exponenten betrachtet.

Ist $\tilde{A}$ ein Element der idealen Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$, so bilden die ganzen idealen Zahlen $\tilde{a}$, für welche $\tilde{A}^{\tilde{a}}$ gleich dem Einheitselement $\tilde{\mathfrak{E}}$ wird, einen ganzen idealen Modul $\tilde{\mathfrak{a}}$, die *Ordnung des Elementes* $\tilde{A}$ von $\tilde{\mathfrak{G}}$. Haben die Scharen $\tilde{F}_\alpha$ als Elemente der Gruppen $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{F}_\alpha$ die Ordnungen $\tilde{\mathfrak{a}}_\alpha$, und ist $\tilde{A} = \Delta \tilde{F}_\alpha$, so hat $\tilde{A}$ die Ordnung $\Delta \tilde{\mathfrak{a}}_\alpha$. Hat $\tilde{A}$ die Ordnung $\underset{p}{\Delta}\widetilde{[p^k]}$, so hat die p-Komponente von $\tilde{A}$ die Ordnung $\widetilde{[p^k]} \times \bmod \tilde{1}$. Dann und nur dann ist $\tilde{\mathfrak{G}}$ eine zu p gehörige primäre Gruppe, wenn jedes Element von $\tilde{\mathfrak{G}}$ eine Ordnung

$$\widetilde{[p^k]} \times \bmod \tilde{1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

hat.

Aus Theorem I schließt man leicht, daß in jeder Unterschar $\tilde{F}$ von $\tilde{\mathfrak{G}}$ ein Element $\tilde{E}$ enthalten ist, dessen Ordnung $\tilde{\mathfrak{e}}$ der Vereinigungsmodul der Ordnungen aller Elemente aus $\tilde{F}$ ist. Dieser Modul $\tilde{\mathfrak{e}}$ heißt die *Ordnung der Unterschar* $\tilde{F}$ von $\tilde{\mathfrak{G}}$.

Eine Gleichung $\tilde{A}^{\tilde{a}} = \tilde{X}^{\tilde{b}}$ ist dann und nur dann durch ein Element von $\tilde{\mathfrak{G}}$ lösbar, wenn die Gleichung für jede p-Komponente $\tilde{A}_p$ von $\tilde{A}$ in $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{A}_p$ lösbar ist. Für $\tilde{A}_p$ hängt die Lösbarkeit aber nur noch von den p-Komponenten von $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$ ab. Daraus schließt man: Sind $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$ ideale teilerfremde ganze Zahlen und ist $\tilde{b}$ kein Nullteiler, so bilden die Zahlen $\tilde{a}:\tilde{b}$, für welche die Gleichung $\tilde{A}^{\tilde{a}} = \tilde{X}^{\tilde{b}}$ lösbar ist, einen idealen Modul, die *Höhe* des Elementes $\tilde{A}$ in $\tilde{\mathfrak{G}}$. Sind $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$ teilerfremd, ist aber $\tilde{b}$ ein Nullteiler, so ist die Lösbarkeit der Gleichung $\tilde{A}^{\tilde{a}} = \tilde{X}^{\tilde{b}}$ ers durch Höhe und Ordnung von $\tilde{A}$ eindeutig bestimmt. Ist $\tilde{\mathfrak{G}}$ eine primär

Gruppe, so hat jedes Element von $\tilde{\mathfrak{G}}$ eine Höhe $\widetilde{[p^{-k}]}$. Doch ist das keine für primäre Gruppen charakteristische Eigenschaft.

Ist das Element $\tilde{A}$ von $\tilde{\mathfrak{G}}$ der Durchschnitt der Unterscharen $\tilde{F}_\alpha$ von $\tilde{\mathfrak{G}}$, hat ferner $\tilde{A}$ in $\tilde{\mathfrak{G}}$ die Höhe $\tilde{\mathfrak{a}}$ und $\tilde{F}_\alpha$ in $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{F}_\alpha$ die Höhe $\tilde{\mathfrak{a}}_\alpha$, so ist $\tilde{\mathfrak{a}} \leqq \Delta\, \tilde{\mathfrak{a}}_\alpha$. In zwei Fällen kann man hier die Gleichheit beweisen: Erstens ist $\tilde{\mathfrak{a}} = \Delta\, \tilde{\mathfrak{a}}_\alpha$, wenn $\tilde{\mathfrak{G}}$ der direkte Durchschnitt der Gruppen $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{F}_\alpha$ ist. Denn aus $\tilde{F}_\alpha^{\tilde{\mathfrak{a}}} = \tilde{Y}_\alpha^{\tilde{b}}$ folgt $\tilde{A}^{\tilde{\mathfrak{a}}} = (\Delta\, \tilde{Y}_\alpha)^{\tilde{b}}$. Zweitens ist $\tilde{\mathfrak{a}} = \Delta\, \tilde{\mathfrak{a}}_\alpha$, wenn $\tilde{F}_\alpha$ alle großen Unterscharen von $\tilde{\mathfrak{G}}$ durchläuft, die Oberscharen von $\tilde{A}$ sind. Denn ist $\tilde{a} : \tilde{b} < \Delta\, \tilde{\mathfrak{a}}_\alpha$, so bilden die Lösungen jeder Gleichung $\tilde{F}^{\tilde{\mathfrak{a}}} = \tilde{Y}_\alpha^{\tilde{b}}$ eine Schar $\tilde{G}_\alpha/\tilde{F}_\alpha$. Die Scharen $\tilde{G}_\alpha$ haben zu je endlich vielen einen Durchschnitt. Daher existiert $\Delta\, \tilde{G}_\alpha$. Für jedes Element $\tilde{B} \leqq \Delta\, \tilde{G}_\alpha$ wird aber $\tilde{A}^{\tilde{\mathfrak{a}}} = \tilde{B}^{\tilde{b}}$.

Mit den zuletzt ausgeführten Schlüssen beweist man auch: Für jedes Element $\tilde{A}$ einer idealen Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$ bilden die Elemente $\tilde{X}$, für welche bei geeignet gewählten $\tilde{Y}, \ldots$ eine Gleichung $\tilde{A} = \tilde{X}^{\tilde{a}} \cdot \tilde{Y}^{\tilde{b}} \ldots$ besteht, eine ideale Schar. Insbesondere bildet die Menge der Elemente, deren Ordnungen oder Höhen Obermoduln eines festen Moduls sind, eine ideale Gruppe.

Servanzuntergruppen und *Servanzkomplemente* definiert man wörtlich ebenso wie bei den realen Gruppen. Wie dort, sind auch bei den idealen Gruppen die Servanzkomplemente die Komplemente der Servanzuntergruppen. Wie dort, ist auch hier jeder direkte Faktor eine Servanzuntergruppe. Nur für ideale Gruppen gilt dagegen der Satz:

Ist $\tilde{\mathfrak{G}}_0 \geqq \tilde{\mathfrak{G}}_1 \geqq \tilde{\mathfrak{G}}_2 \geqq \ldots$ *eine wohlgeordnete Menge von Servanzuntergruppen einer idealen Gruppe* $\tilde{\mathfrak{H}}$, *so ist auch* $\Delta\, \tilde{\mathfrak{G}}_\varrho$ *eine Servanzuntergruppe von* $\tilde{\mathfrak{H}}$.

Beweis. Ist $\tilde{G}_\varrho$ die Schar der in $\tilde{\mathfrak{G}}_\varrho$ enthaltenen Lösungen einer in $\tilde{\mathfrak{H}}$ lösbaren Gleichung $\tilde{X}^{\tilde{r}} = \tilde{A} < \Delta\, \tilde{\mathfrak{G}}_\varrho$, so ist $\Delta\, \tilde{G}_\varrho$ vorhanden und jedes Element aus $\Delta\, \tilde{G}_\varrho$ eine Lösung der vorgelegten Gleichung in $\Delta\, \tilde{\mathfrak{G}}_\varrho$.

§ 11.

In Ordnung und Höhe hat man zwei Eigenschaften der Elemente einer idealen Gruppe, welche von keiner Darstellungsweise der Gruppe abhängen. Zwei ideale Gruppen können deshalb nur dann isomorph sein, wenn alle Untergruppen, welche die Elemente bilden, deren Ordnungen oder Höhen Obermoduln eines festen Moduls sind, denselben Typus haben. Diese Bemerkung dient zum Beweis des folgenden Satzes:

Theorem II. *Ist eine ideale Gruppe* $\tilde{\mathfrak{G}}$ *auf zwei Arten als direkter Durchschnitt primärer Gruppen* $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ *und* $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{\mathfrak{F}}'_\beta$ *vom Range* 1 *dargestellt, so lassen sich die Untergruppen* $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ *und* $\tilde{\mathfrak{F}}'_\beta$ *einander eineindeutig so zuordnen, daß zugeordnete Komplemente* $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ *und* $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{\mathfrak{F}}'_\beta$ *isomorph sind.*

Theorem I zufolge kann man sich beim Beweise auf den Fall einer primären Gruppe $\mathfrak{G}$ beschränken. Die Primzahl, zu der $\mathfrak{G}$ gehört, sei p.

Zunächst führe ich für die vorkommenden Typen kurze Bezeichnungen ein. Den Typus der Gruppe

$$\begin{aligned}
\overline{[p^l]}/\overline{[p^{k+l}]} &\text{ bezeichne ich mit } \mathsf{A}_k,\\
\overline{[p^{-\infty}]}/\overline{[p^l]} &\text{ „ „ „ } \mathsf{B},\\
\overline{[p^l]}/\overline{[p^{+\infty}]} &\text{ „ „ „ } \Gamma,\\
\overline{[p^{-\infty}]}/\overline{[p^{+\infty}]} &\text{ „ „ „ } \Delta.
\end{aligned}$$

Damit sind sämtliche Typen primärer Gruppen vom Range 1 aufgezählt. Den Typus des direkten Durchschnitts einer Menge solcher Gruppen schreibe ich in Form eines Produktes der Typen der Gruppen vom Range 1. Gleiche Faktoren fasse ich dabei zu Potenzen zusammen. Die Exponenten können dann beliebige Mächtigkeiten sein.

Die Elemente der gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$, deren Ordnungen Obermoduln von mod $\mathfrak{p}^k$ — unter Einschluß dieses Moduls selbst — sind, mögen die Gruppe $\mathfrak{H}_k$ bilden. Die Vereinigungsgruppe von $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$, die übrigens im allgemeinen auch Elemente der Ordnung $\overline{[p^{+\infty}]} \times \bmod \mathfrak{1}$ enthält, heiße $\mathfrak{H}_*$. Die Gruppe der Elemente von $\mathfrak{G}$, deren Höhen Obermoduln von $\overline{[p^{-k}]}$ sind, sei $\mathfrak{H}_k$. Die Gruppe der Elemente der Höhe $\overline{[p^{-\infty}]}$ sei $\mathfrak{H}_\infty$.

Da man die Elemente vorgegebener Ordnung und Höhe bei einer Gruppe vom Range 1 sofort bestimmen kann, führt das einfache Verhalten von Ordnung und Höhe bei direkter Durchschnittsbildung ohne weiteres zur Kenntnis der Untergruppen $\mathfrak{H}_k$, $\mathfrak{H}_*$, $\mathfrak{H}_k$, $\mathfrak{H}_\infty$ der in Gruppen vom Range 1 zerlegten Gruppe $\mathfrak{G}$.

Auf Grund der gegebenen Zerlegung in die Gruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_a$ komme der idealen Gruppe $\mathfrak{G}$ der Typus

$$\mathsf{A}_1^{a_1} \cdot \mathsf{A}_2^{a_2} \ldots \mathsf{B}^b \cdot \Gamma^c \cdot \Delta^b$$

zu. Es ist dann nachzuweisen, daß die Exponenten durch $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt sind. Nun ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_1 &\text{ vom Typus } \mathsf{A}_1^{a_1},\\
\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 &\text{ „ } \mathsf{A}_1^{a_2},\\
\ldots\ldots\ldots

Die Gruppe $\overline{[p^0]}/\overline{[p^1]}$ vom Typus A_1 wird, wenn man noch, was in eindeutiger Weise möglich ist, zur Addition eine Multiplikation der Gruppenelemente hinzufügt, zu einem Körper. Dasselbe gilt von der Gruppe $\overline{[p^{-\infty}]}/\overline{[p^{+\infty}]}$ vom Typus Δ. Ist $\mathfrak{a}$ endlich, so schließt man daraus mit Hilfe bekannter Determinantensätze, daß $\mathfrak{a}$ die größte Anzahl unabhängiger, durch ein Element erzeugter Untergruppen von $\tilde{\mathfrak{G}}$ ist.

Zweitens sei $\mathfrak{a}$, die Anzahl der Gruppen $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$, deren direkter Durchschnitt $\tilde{\mathfrak{G}}$ ist, eine unendliche Kardinalzahl. Weiter sei $\tilde{\mathfrak{G}}$ der direkte Durchschnitt von $\mathfrak{b}$ Gruppen $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{\mathfrak{F}}'_\beta$ des Ranges 1. Hat $\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{\mathfrak{F}}'_\beta$ den Typus A_1, so ist $\tilde{\mathfrak{F}}'_\beta$ eine große Untergruppe von $\tilde{\mathfrak{G}}$, also Obergruppe eines Durchschnitts endlich vieler $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$. Beim Typus Δ ist $\tilde{\mathfrak{F}}'_\beta$ wenigstens der Durchschnitt einer abzählbaren Folge von großen Untergruppen von $\tilde{\mathfrak{G}}$, also Obergruppe eines Durchschnitts von höchstens abzählbar vielen $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$. Da nicht sämtliche $\tilde{\mathfrak{F}}'_\beta$ schon Obergruppen des Durchschnitts einer Teilmenge der $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ sein können, ist $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{b}$. Entsprechend ergibt sich $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$.

Als Spezialfall ist in dem hiermit bewiesenen Theorem II der Satz enthalten: Stellt man eine reale Gruppe $\mathfrak{H}$, die nur große Untergruppen enthält, nach I. § 12 als direktes Produkt primärer Gruppen vom Range 1 dar, so sind die Typen der Faktoren durch $\mathfrak{H}$ eindeutig bestimmt.

§ 12.

Fortschreitend auf dem Wege zum Hauptziel dieser Untersuchung, der Zerlegung idealer Gruppen in unabhängige Gruppen vom Range 1, hat man jetzt, wie in I. § 12 und I. § 13, die Existenz gewisser Untergruppen der untersuchten Gruppe nachzuweisen. Bei den Beweisen beschränke ich mich, der Einfachheit der Darstellung wegen, auf den Fall primärer, zur Primzahl p gehöriger, Gruppen. Die allgemeine Gültigkeit der behaupteten Sätze folgt dann leicht aus Theorem I.

1. *Jedes Element $\tilde{A}$ der idealen Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}$ hat die Höhe, welche es in $\tilde{\mathfrak{H}}$ besitzt, bereits in einer Untergruppe des Ranges* 1 *von* $\tilde{\mathfrak{H}}$.

Beweis. Ist erstens die Gleichung $\tilde{X}^{p^k} = \tilde{A}$ für $k = l$ zwar noch durch ein Element $\tilde{B} < \tilde{\mathfrak{H}}$ lösbar, für $k = l+1$ aber nicht mehr, so hat $\operatorname{grp} \tilde{B}$ die verlangte Eigenschaft. Ist zweitens die Gleichung $\tilde{X}^{p^k} = \tilde{A}$ für jeden Wert von k lösbar, so bilden die p^{k-1}-ten Potenzen der Wurzeln dieser Gleichung eine Schar. Die Scharen, die man für die verschiedenen Werte von k erhält, haben einen Durchschnitt. Daher gibt es ein Element $\tilde{B}$, das der Gleichung $\tilde{B}^p = \tilde{A}$ genügt und für das jede Gleichung $\tilde{X}^{p^k} = \tilde{B}$ lösbar ist. Mit $\tilde{B}$ verfährt man ebenso, wie oben mit $\tilde{A}$. Setzt man das Verfahren fort, so erhält man eine unendliche Folge von Elementen. Diese erzeugen zusammen eine Gruppe der gesuchten Art.

2. *Jede ideale Gruppe enthält eine Servanzuntergruppe vom Range* 1.

Beweis. Gibt es in der idealen primären Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}$ Elemente der Ordnung mod $\tilde{p}$, so sei $\tilde{A}$ ein solches. Andernfalls sei $\tilde{A}$ ein beliebiges, vom Einheitselement verschiedenes, Element von $\tilde{\mathfrak{H}}$, das also dann die Ordnung $\overbrace{[p^{+\infty}]} \times \bmod \tilde{1}$ hat. In beiden Fällen ist eine Gruppe des Ranges 1, in der $\tilde{A}$ dieselbe Höhe wie in $\tilde{\mathfrak{H}}$ hat, eine Servanzuntergruppe von $\tilde{\mathfrak{H}}$.

3. *Ist* $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}$ *ein Servanzkomplement in* $\tilde{\mathfrak{H}}$ *vom Range* 1, *so ist* $\tilde{\mathfrak{G}}$ *ein direkter Faktor von* $\tilde{\mathfrak{H}}$.

Beweis. In jeder Nebenschar $\tilde{G}$ von $\tilde{\mathfrak{G}}$ bilden die Elemente von $\tilde{\mathfrak{H}}$, welche dieselbe Ordnung wie $\tilde{G}$ haben, eine Schar $\tilde{F} \leqq \tilde{G}$. Ist $\tilde{G}^{p^k} = \tilde{G}_0$, so bilden die p^k-ten Potenzen der Elemente von $\tilde{F}$ eine Schar $\tilde{F}_k \leqq \tilde{G}_0$. Wird $\tilde{G}_0 + \tilde{\mathfrak{G}}$ festgehalten, aber k variiert, so haben je endlich viele $\tilde{F}_k$ gemeinsame Elemente. Sei $\tilde{A} \leqq \Delta \tilde{F}_k$ und $\tilde{\mathfrak{F}}$ eine Gruppe vom Range 1, in der $\tilde{A}$ dieselbe Höhe hat wie in $\tilde{\mathfrak{H}}$. Dann ist $\tilde{\mathfrak{H}}$ das direkte Produkt von $\tilde{\mathfrak{F}}$ und $\tilde{\mathfrak{G}}$.

4. *Ist* $\tilde{\mathfrak{H}}$ *eine ideale primäre Gruppe und* $\tilde{\mathfrak{F}}$ *eine Servanzuntergruppe des Ranges* 1 *von* $\tilde{\mathfrak{H}}$, *die ein Element der Ordnung* mod $\tilde{p}$ *enthält, so ist* $\tilde{\mathfrak{H}}$ *das direkte Produkt von* $\tilde{\mathfrak{F}}$ *mit einer idealen Gruppe* $\tilde{\mathfrak{G}}$.

Beweis. Die Schlüsse in I. § 12 lassen sich übertragen.

5. *Ist* $\tilde{\mathfrak{H}}$ *eine ideale primäre Gruppe, die kein Element der Ordnung* mod $\tilde{p}$ *enthält, und ist* $\tilde{\mathfrak{F}}$ *eine Servanzuntergruppe des Ranges* 1 *von* $\tilde{\mathfrak{H}}$, *so ist* $\tilde{\mathfrak{H}}$ *das direkte Produkt von* $\tilde{\mathfrak{F}}$ *mit einer idealen Gruppe* $\tilde{\mathfrak{G}}$.

Beweis. Zuerst behandle ich den Fall, daß $\tilde{\mathfrak{F}}$ durch ein Element $\tilde{A}_1$ erzeugt wird. Man kann dann eine große Untergruppe $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ von $\tilde{\mathfrak{H}}$ so bestimmen, daß in der Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}_1$ das Element $\tilde{A}_1 \cdot \tilde{\mathfrak{G}}_1$ die Ordnung mod $\tilde{p}$ hat und daß diese Gruppe überdies durch das Element $\tilde{A}_1 \cdot \tilde{\mathfrak{G}}_1$ erzeugt wird. Dazu hat man zunächst zu der Gruppe der p-ten Potenzen der Elemente von $\tilde{\mathfrak{H}}$ eine $\tilde{A}_1$ nicht enthaltende Obergruppe zu bestimmen, die eine große Untergruppe von $\tilde{\mathfrak{H}}$ ist. Diese Gruppe hat man dann weiter zu vergrößern, bis man eine Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ erhält, welche, im Sinne von I. § 11, durch das Element $\tilde{A}_1 \cdot \tilde{\mathfrak{G}}_1$ beherrscht wird. Mit dem Element $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_1^p$ verfahre man jetzt ebenso wie mit $\tilde{A}_1$; nur daß an die Stelle der Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}$ die Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ tritt. Man erhält eine Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}_2 < \tilde{\mathfrak{G}}_1$. Setzt man das Verfahren ins Unendliche fort und bildet man $\tilde{\mathfrak{G}} = \Delta \tilde{\mathfrak{G}}_k$, so wird $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}$ durch das Element $\tilde{A}_1 \cdot \tilde{\mathfrak{G}}$ der Ordnung $\overbrace{[p^{+\infty}]} \times \bmod \tilde{1}$ erzeugt. Daraus folgt, daß $\tilde{\mathfrak{H}}$ das direkte Produkt von $\tilde{\mathfrak{G}}$ und $\tilde{\mathfrak{F}} = \operatorname{grp} \tilde{A}_1$ ist. — Wird $\tilde{\mathfrak{F}}$ nicht durch ein Element erzeugt, so sei $\tilde{A}_1$

in beliebiges Element von $\tilde{\mathfrak{F}}$, das dann die Höhe $\overbrace{[p^{-\infty}]}$ hat. Man ühre jetzt dieselbe Konstruktion aus, mit der Modifikation, daß man beim rsten Schritt nicht verlangt, daß $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}_1$ durch $\tilde{A}_1 \cdot \tilde{\mathfrak{G}}_1$ erzeugt werden soll.

6. *Jede ideale Gruppe enthält ein Servanzkomplement vom Range* 1.

Beweis. Zu der in 2. konstruierten Servanzuntergruppe $\tilde{\mathfrak{F}}$ vom Range 1 bestimme man nach 4. und 5. die Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$.

§ 13.

Nach § 12, 2. kann man in jeder idealen Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}$ eine abbrechende der unendliche Folge von Servanzuntergruppen $\tilde{\mathfrak{G}}_0 \leqq \tilde{\mathfrak{G}}_1 \leqq \tilde{\mathfrak{G}}_2 \leqq \dots$ ilden, die mit dem Einheitselement $\tilde{\mathfrak{E}} = \tilde{\mathfrak{G}}_0$ beginnt und für die $\tilde{\mathfrak{G}}_{k+1}/\tilde{\mathfrak{G}}_k$ tets vom Range 1 ist. Bricht die Folge ab, d. h. wird für inen endlichen Index n einmal $\tilde{\mathfrak{G}}_n = \tilde{\mathfrak{H}}$, so folgt aus § 12, 3., daß $\tilde{\mathfrak{H}}$ das irekte Produkt von Gruppen des Ranges 1 ist. Beschränkt man sich uf primäre Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}$, so läßt sich zeigen, daß bei verschiedener Wahl er $\tilde{\mathfrak{G}}_k$ nicht einmal eine abbrechende, das andere Mal eine unendliche Folge entstehen kann und daß darüber hinaus die Zahl n durch die Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}$ selbst völlig bestimmt ist.

Ist jede Menge von $n+1$ Elementen der, nicht nur aus dem Einheitselement bestehenden, idealen Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}$ schon in einer durch n Elemente von $\tilde{\mathfrak{H}}$ erzeugten Gruppe enthalten, so soll $\tilde{\mathfrak{H}}$ eine ideale Gruppe *von endlichem Range*, und zwar genau *vom Range* n heißen, wenn n die kleinste Zahl mit der genannten Eigenschaft ist.

Ist

$$\tilde{\mathfrak{E}} = \tilde{\mathfrak{G}}_0 \leqq \tilde{\mathfrak{G}}_1 \leqq \dots \leqq \tilde{\mathfrak{G}}_{n-1} \leqq \tilde{\mathfrak{G}}_n = \tilde{\mathfrak{H}}$$

und $\tilde{\mathfrak{G}}_{\nu+1}/\tilde{\mathfrak{G}}_\nu$ vom Range 1, ist ferner $\tilde{\mathfrak{F}}$ eine durch endlich viele Elemente erzeugte Untergruppe von $\tilde{\mathfrak{H}}$, so läßt sich, wie man durch Induktion leicht beweist, jede Gruppe $\tilde{\mathfrak{F}} \times \tilde{\mathfrak{G}}_\nu$ schon durch ν Elemente, die ganze Gruppe $\tilde{\mathfrak{F}}$ also durch n Elemente erzeugen. Daraus erkennt man erstens, daß $\tilde{\mathfrak{H}}$ höchstens den Rang n hat, zweitens, daß der Rang einer Untergruppe nie größer als der Rang der Obergruppe ist.

Ist andrerseits die, zur Primzahl p gehörige, primäre Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}$ das direkte Produkt von n Gruppen des Ranges 1 und ist $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ je ein Element aus diesen Gruppen, so beweist man mit Hilfe bekannter Determinantensätze, daß

$$\operatorname{grp}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) / \operatorname{grp}(\tilde{A}_1^p, \dots, \tilde{A}_n^p),$$

also erst recht $\operatorname{grp}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$, nicht durch weniger als n Elemente erzeugt werden kann. Der Rang von $\tilde{\mathfrak{H}}$ ist also mindestens gleich n.

Man kann demnach dem oben gefundenen Satze die Form geben:

Die idealen primären Gruppen vom Range n sind die direkten Produkte von n primären Gruppen vom Range 1.

Eine beliebige ideale Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}$ hat dann und nur dann einen endlichen Rang, wenn die Rangzahlen der Komponenten von $\tilde{\mathfrak{H}}$ nach den einzelnen Primzahlen beschränkt sind. Dann ist die größte dieser Rangzahlen der Rang von $\tilde{\mathfrak{H}}$. Daraus folgt:

Theorem III. *Jede ideale Gruppe endlichen Ranges ist das direkte Produkt endlich vieler idealer Gruppen vom Range 1. Jede Servanzuntergruppe einer idealen Gruppe endlichen Ranges ist ein direkter Faktor der Gruppe.*

Weiter folgt aus § 12, 3.:

Ist $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}$ ein Servanzkomplement von endlichem Range in $\tilde{\mathfrak{H}}$, so ist $\tilde{\mathfrak{G}}$ ein direkter Faktor von $\tilde{\mathfrak{H}}$.

Dagegen braucht eine Servanzuntergruppe endlichen Ranges von $\tilde{\mathfrak{H}}$ kein direkter Faktor von $\tilde{\mathfrak{H}}$ zu sein. Das gilt, wie sich durch Beispiele belegen läßt, schon für Servanzuntergruppen des Ranges 1. Die hier bestehenden Sätze 4 und 5 in § 12 erschöpfen ja nicht alle möglichen Fälle. Wäre jede Servanzuntergruppe des Ranges 1 von $\tilde{\mathfrak{H}}$ notwendig ein direkter Faktor von $\tilde{\mathfrak{H}}$, so könnte man leicht mit Hilfe des Schlusses von § 10 und des Satzes 6 in § 12 beweisen, daß jede ideale Gruppe der direkte Durchschnitt von Gruppen vom Range 1 ist. So aber bin ich nicht imstande, den Satz zu beweisen. Zu widerlegen vermag ich ihn allerdings ebensowenig. Hier tritt also dieselbe Schwierigkeit auf wie in I. § 14 und auch hier läßt sie sich nicht allgemein überwinden. Aber es ist ein Fortschritt erzielt: Die idealen Gruppen endlichen Ranges lassen sich zerlegen, die entsprechenden realen Gruppen nicht. Daß sich auch die Zerlegbarkeit sehr allgemeiner Klassen idealer Gruppen unendlichen Ranges mit Hilfe der Sätze in § 12 beweisen läßt, erwähne ich nur nebenbei. Ich behandle nur noch die zerlegbaren idealen Gruppen, auf welche die Untersuchung einer beliebigen realen Gruppe führt.

§ 14.

Bevor ich zu dieser Untersuchung übergehe, leite ich aber noch einen merkwürdigen Satz über ideale Gruppen endlichen Ranges her, der für diese Gruppen die schon vielfach bemerkte Dualität zwischen Produkt und Durchschnitt in einfacher Weise zum Ausdruck bringt.

Sei $\mathfrak{R}$ die Gruppe der Systeme von n rationalen Zahlen, welche entsteht, wenn, wie in I. § 10, das Produkt zweier solcher Systeme durch die Gleichung

$$(r_1, \ldots, r_n)\cdot(s_1, \ldots, s_n) = (r_1 + s_1, \ldots, r_n + s_n)$$

efiniert wird. Ist p eine fest gewählte Primzahl, so besteht die Gruppe $\mathfrak{P}$ der -Komponenten der idealen Elemente von $\mathfrak{R}$ aus den Systemen $(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n)$ er p-Komponenten der idealen rationalen Zahlen[6]). Dabei ist $\tilde{a}_\nu)\cdot(\tilde{b}_\nu) = (\tilde{a}_\nu + \tilde{b}_\nu)$. Jedes Element $(\tilde{a}_\nu)$ von $\mathfrak{P}$ ist in einer einzigen mit $\overline{[p^{-\infty}]}/\overline{[p^{+\infty}]}$ isomorphen Gruppe enthalten. Man erhält die Elemente ieser Gruppe in der Form $(\tilde{r}\,\tilde{a}_\nu)$, wenn man $\tilde{r}$ die p-Komponenten aller tionalen idealen Zahlen durchlaufen läßt. Da die p-Komponenten der tionalen idealen Zahlen einen Körper bilden, kann man auf die Systeme $\tilde{a}_\nu)$ die Sätze der Determinantentheorie anwenden. Ich weise insbesondere arauf hin, daß mehrere Systeme $(\tilde{a}_\nu)$ dann und nur dann im Sinne der eterminantentheorie unabhängig sind, wenn die durch die $(\tilde{a}_\nu)$ erzeugten ntergruppen von $\mathfrak{P}$ unabhängig sind. Ich leite zunächst zwei Hilfsätze her:

1. Ist $(\tilde{a}_\nu)$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{P}$, so bilden die Elemente $\tilde{x}_\nu)$ von $\mathfrak{P}$, für welche $\sum_\nu \tilde{a}_\nu \tilde{x}_\nu$ die p-Komponente einer ganzen Zahl ird, eine ideale Gruppe. — Ist $(\tilde{a}_\nu) = (\tilde{0}_p)$, — mit $\tilde{0}_p$ bezeichne ich der Kürze wegen den Modul $\overline{[p^{+\infty}]}$ —, so ist die Bedingung für jedes Element von $\mathfrak{P}$ erfüllt. Ist $(\tilde{a}_\nu) \neq (\tilde{0}_p)$, so hat die Gleichung $\Sigma\, \tilde{a}_\nu \tilde{x}_\nu = \tilde{0}_p$ enau $n-1$ voneinander unabhängige Lösungssysteme $(\tilde{b}_{1\nu}), \ldots, (\tilde{b}_{n-1,\nu})$. st $\mathfrak{B}_\mu$ die Gruppe, die von den Systemen $(\tilde{r}\,\tilde{b}_{\mu\nu})$ gebildet wird, wenn $\tilde{r}$ lle p-Komponenten idealer Zahlen durchläuft, so ist die Gleichung $\Sigma\, \tilde{a}_\nu \tilde{x}_\nu = \tilde{0}_p$ also genau für die Elemente von $\Pi\, \mathfrak{B}_\mu$ erfüllt. Ist $(\tilde{c}_\nu)$ ein on allen $(\tilde{b}_{\mu\nu})$ unabhängiges System von p-Komponenten idealer Zahlen nd $\mathfrak{C}$ die Gruppe der Systeme $(\tilde{r}\,\tilde{c}_\nu)$, so ist $\mathfrak{P}$ das direkte Produkt der ruppen $\mathfrak{B}_\mu$ und $\mathfrak{C}$. Setzt man $\Sigma\, \tilde{a}_\nu \tilde{c}_\nu = \tilde{e}$, so ist $\tilde{e} \neq \tilde{0}_p$. Da $\Sigma\, \tilde{a}_\nu \tilde{x}_\nu$ ir alle Systeme (x_ν) aus derselben Nebenschar von $\Pi\, \mathfrak{B}_\mu$ denselben Wert at, folgt

$$(\tilde{x}_\nu) < \mathrm{grp}\,(\tilde{c}_\nu : \tilde{e}) \cdot \Pi\, \mathfrak{B}_\mu$$

ls notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\Sigma\, \tilde{a}_\nu \tilde{x}_\nu$ ganz wird.

2. Ist $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{P}$ und $(\tilde{c}_\nu)$ ein nicht in $\mathfrak{B}$ enthaltenes Element von $\mathfrak{P}$, so kann man $(\tilde{a}_\nu) < \mathfrak{P}$ so bestimmen, daß $\Sigma\, \tilde{a}_\nu \tilde{x}_\nu$ ir jedes Element $(\tilde{x}_\nu) < \mathfrak{B}$, nicht aber für $(\tilde{x}_\nu) = (\tilde{c}_\nu)$ die p-Komponente iner ganzen Zahl wird. — Da $\mathfrak{C} = \mathrm{grp}\,(\tilde{c}_\nu) \times \mathfrak{B}$ eine Servanzuntergruppe on $\mathfrak{B}$ ist, ist $\mathfrak{B}$ nach § 13 das direkte Produkt von $\mathfrak{C}$ mit einer Gruppe $\mathfrak{B}'$, eren Rang höchstens gleich $n-1$ ist. Stellt man $\mathfrak{B}'$ nach § 13 als irektes Produkt von Gruppen $\mathfrak{B}_\mu$ vom Range 1 dar und wählt man aus

[6]) Die $\tilde{a}_\nu$ sind also Henselsche p-adische Zahlen.

jeder Gruppe $\mathfrak{B}_\mu$ ein Element $(\tilde{b}_{\mu\nu}) \neq (\tilde{0}_p)$ aus, so kann man nach den Sätzen der Determinantentheorie $(\tilde{a}_\nu)$ so bestimmen, daß

$$\sum \tilde{b}_{\mu\nu}\tilde{a}_\nu = \tilde{0}_p, \qquad \sum \tilde{c}_\nu \tilde{a}_\nu = \tilde{e}$$

wird. Wählt man für $\tilde{e}$ die p-Komponente von $\tilde{p}^{-1}$, so genügt $(\tilde{a}_\nu)$ allen Bedingungen.

Ist $\tilde{\mathfrak{A}}$ eine Untergruppe von $\tilde{\mathfrak{P}}$, so folgt aus 1., daß die Systeme $(\tilde{x}_\nu)$, für welche $\sum \tilde{a}_\nu \tilde{x}_\nu$ die p-Komponente einer ganzen Zahl wird, sobald $(\tilde{a}_\nu) < \tilde{\mathfrak{A}}$ ist, eine ideale Gruppe $\varphi(\tilde{\mathfrak{A}})$ bilden. Aus 2. folgt, daß für $\tilde{\mathfrak{A}} \neq \tilde{\mathfrak{B}}$ auch $\varphi(\tilde{\mathfrak{A}}) \neq \varphi(\tilde{\mathfrak{B}})$ ist. Ist $\tilde{\mathfrak{A}} < \tilde{\mathfrak{B}}$, so wird $\varphi(\tilde{\mathfrak{A}}) > \varphi(\tilde{\mathfrak{B}})$. Ferner ergibt sich aus der Definition sofort $\varphi(\varphi(\tilde{\mathfrak{A}})) \geqq \tilde{\mathfrak{A}}$. Wäre für irgendeine Gruppe $\varphi(\varphi(\tilde{\mathfrak{A}})) > \tilde{\mathfrak{A}}$, so würde

$$\varphi\big(\varphi(\varphi(\tilde{\mathfrak{A}}))\big) < \varphi(\tilde{\mathfrak{A}})$$

folgen, was nicht möglich ist. Die Zuordnung von $\varphi(\tilde{\mathfrak{A}})$ zu $\tilde{\mathfrak{A}}$ ist also involutorisch; d. h. aus $\tilde{\mathfrak{B}} = \varphi(\tilde{\mathfrak{A}})$ folgt $\tilde{\mathfrak{A}} = \varphi(\tilde{\mathfrak{B}})$. Daraus schließt man, daß jede Gruppe $\tilde{\mathfrak{B}} \leqq \tilde{\mathfrak{P}}$ eine Gruppe $\varphi(\tilde{\mathfrak{A}})$ ist.

Für jede der primären Gruppen $\tilde{\mathfrak{P}}$, deren direkter Durchschnitt die Gruppe $\tilde{\mathfrak{R}}$ nach Theorem I ist, bestimme man die Funktion $\varphi = \varphi_p$. Ist $\tilde{\mathfrak{S}} \leqq \tilde{\mathfrak{R}}$ und $\tilde{\mathfrak{S}}_p$ die p-Komponente von $\tilde{\mathfrak{S}}$, so setze man $\psi(\tilde{\mathfrak{S}}) = \Delta\, \varphi_p(\tilde{\mathfrak{S}}_p)$, so daß also der Gruppe $\tilde{\mathfrak{S}}$ die Gruppe der Elemente $(\tilde{t}_\nu) < \tilde{\mathfrak{R}}$ zugeordnet wird, für welche $\sum \tilde{s}_\nu \tilde{t}_\nu$ eine ganze Zahl wird, sobald $(\tilde{s}_\nu) < \tilde{\mathfrak{S}}$ ist. Man erhält so den Satz:

Ist die reale Gruppe $\mathfrak{R}$ das direkte Produkt von n zum Modul der rationalen Zahlen isomorphen Gruppen, so kann man die Untergruppen der zu $\mathfrak{R}$ gehörigen idealen Gruppe einander eineindeutig und involutorisch so zuordnen, daß, wenn $\tilde{\mathfrak{A}}$ eine Untergruppe von $\tilde{\mathfrak{B}}$ ist, das Bild von $\tilde{\mathfrak{B}}$ eine Obergruppe des Bildes von $\tilde{\mathfrak{B}}$ wird.

Hieraus folgt für endlich viele Untergruppen $\tilde{\mathfrak{S}}_\nu$ von $\tilde{\mathfrak{R}}$ sofort

$$\psi(\Pi \tilde{\mathfrak{S}}_\nu) = \Delta\, \psi(\tilde{\mathfrak{S}}_\nu).$$

Sind $\tilde{\mathfrak{S}}$ und $\tilde{\mathfrak{T}}$ Untergruppen von $\tilde{\mathfrak{R}}$ und ist $\tilde{\mathfrak{S}} > \tilde{\mathfrak{T}}$, so wird der Gruppe $\tilde{\mathfrak{S}}/\tilde{\mathfrak{T}}$ eine Gruppe $\psi(\tilde{\mathfrak{T}})/\psi(\tilde{\mathfrak{S}})$ zugeordnet. Die Definition von ψ zeigt zunächst, daß $\psi(\tilde{\mathfrak{T}})/\psi(\tilde{\mathfrak{S}})$ dann und nur dann eine zur Primzahl p gehörige primäre Gruppe ist, wenn $\tilde{\mathfrak{S}}/\tilde{\mathfrak{T}}$ eine solche Gruppe ist. Da die primären Gruppen vom Range 1 die einzigen Gruppen sind, in denen von je zwei Untergruppen die eine in der andern enthalten ist, ist weiter $\psi(\tilde{\mathfrak{T}})/\psi(\tilde{\mathfrak{S}})$ eine primäre Gruppe vom Range 1, wenn $\tilde{\mathfrak{S}}/\tilde{\mathfrak{T}}$ es ist. Daraus ergibt sich leicht, daß jede Gruppe, die mit

$$\underset{p}{\Delta}\widetilde{[p^k]}/\underset{p}{\Delta}\widetilde{[p^l]}$$

leichen Typus hat, in eine zu

$$\Delta_p\overline{[p^{-l}]}/\Delta_p\overline{[p^{-k}]}$$

omorphe Gruppe übergeht.

Aus Theorem III folgt, daß zu jeder Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}$, deren Rang höchstens leich n ist, zwei Untergruppen $\tilde{\mathfrak{S}}$ und $\tilde{\mathfrak{T}}$ von $\tilde{\mathfrak{R}}$ so bestimmt werden önnen, daß $\tilde{\mathfrak{H}}$ und $\tilde{\mathfrak{S}}/\tilde{\mathfrak{T}}$ isomorph sind. Das liefert den Satz:

Ist $\tilde{\mathfrak{H}}$ eine ideale Gruppe endlichen Ranges, so gibt es eine zweite deale Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}'$ desselben Ranges, deren Untergruppen sich den Unter-ruppen von $\tilde{\mathfrak{H}}$ eineindeutig so zuordnen lassen, daß, wenn $\tilde{\mathfrak{F}} < \tilde{\mathfrak{G}} \leqq \tilde{\mathfrak{H}}$, as Bild von $\tilde{\mathfrak{F}}$ eine Obergruppe des Bildes von $\tilde{\mathfrak{G}}$ wird.

Ist $\tilde{\mathfrak{H}}$ das direkte Produkt der Gruppen $\tilde{\mathfrak{F}}_\nu$ vom Range 1 und geht ei der Zuordnung $\tilde{\mathfrak{F}}_\nu$ in eine Gruppe $\tilde{\mathfrak{F}}'_\nu < \tilde{\mathfrak{H}}'$ über, so ist $\tilde{\mathfrak{H}}'$ der direkte Durchschnitt der Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}'/\tilde{\mathfrak{F}}'_\nu$, und diese Gruppen sind vom Range 1. hre Typen kann man in der oben angegebenen Weise aus den Typen der ruppen $\tilde{\mathfrak{F}}_\nu$ bestimmen. Es ergibt sich noch, daß bei dieser Zuordnung ie Gruppe der Elemente von $\tilde{\mathfrak{H}}$, deren Ordnungen Obermoduln von $\overline{[p^{+k}]}$ sind, in die Gruppe der Elemente von $\tilde{\mathfrak{H}}'$, deren Höhen Ober-oduln von $\Delta\overline{[p^{-k}]}$ sind, übergeht.

Wenn weder k noch l einen der Werte $\pm\infty$ hat, sind die Gruppen $\overline{p^l}]/\overline{[p^{k+l}]}$ für alle l isomorph. Daraus folgt:

Die Menge der Untergruppen einer aus endlich vielen Elementen be-tehenden Gruppe kann so auf sich selbst abgebildet werden, daß, wenn $\mathfrak{F}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, das Bild von $\mathfrak{F}$ eine Obergruppe des Bildes von $\mathfrak{G}$ wird[7]).

§ 15.

Zu der am Schlusse von § 13 angekündigten Untersuchung habe ich ie in §§ 9—10 definierten Begriffe jetzt auf ideale Gruppen und Elemente nzuwenden, die zu realen Gruppen und Elementen gehören, und mit den n ersten Teil der Arbeit für reale Gruppen definierten entsprechenden Begriffen zu vergleichen.

Ist $\mathfrak{H}$ eine reale Gruppe und A ein Element der Ordnung $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{H}$, o gehört für jede ganze reale Zahl a das ideale Element $\tilde{A}^{\tilde{a}}$ zu A^a.

---

[7]) Dieser Satz wird von H. Weber, Lehrbuch der Algebra, **II** (1896), S. 48 ff., it Hilfe der Gruppencharaktere bewiesen. Dabei ergibt sich noch, daß die Abbildung volutorisch ist, was hier nicht bewiesen ist.

Ferner ist $\tilde{\mathfrak{a}}$ die Ordnung von $\tilde{A}$ in $\tilde{\mathfrak{H}}$ und $\widetilde{\operatorname{grp} A} = \operatorname{grp} \tilde{A}$. Daraus folgt, wenn $B, C, \ldots$ weitere Elemente von $\mathfrak{H}$ sind, allgemeiner:

$$\widetilde{\operatorname{grp}(A, B, C, \ldots)} = \operatorname{grp}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \ldots).$$

Dann und nur dann hat die ideale Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}$ den Rang 1, wenn $\mathfrak{H}$ vom Range 1 ist. Weiter gilt:

Ist $\mathfrak{G}$ die Gruppe der Elemente von $\mathfrak{H}$, deren Ordnungen Obermoduln von $\mathfrak{a}$ sind, so ist $\tilde{\mathfrak{G}}$ die Gruppe der Elemente von $\tilde{\mathfrak{H}}$, deren Ordnungen Obermoduln von $\tilde{\mathfrak{a}}$ sind.

Beweis. Da $\tilde{\mathfrak{G}}$ durch die idealen Elemente von $\mathfrak{H}$ erzeugt wird, welche zu realen Elementen mit Obermoduln von $\mathfrak{a}$ als Ordnungen gehören, hat jedes Element von $\tilde{\mathfrak{G}}$ sicher einen Obermodul von $\tilde{\mathfrak{a}}$ zur Ordnung. Beim Beweis der Umkehrung kann man sich auf den Fall beschränken, daß $\mathfrak{a}$ durch eine Primzahlpotenz p^l erzeugt wird. Ist $\tilde{E}$ ein ideales Element von $\tilde{\mathfrak{H}}$ mit einer Ordnung $\bmod \tilde{p}^n$, das nicht in $\tilde{\mathfrak{G}}$ enthalten ist, so kann man eine große Untergruppe $\mathfrak{F} \geqq \mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$ so bestimmen, daß $\mathfrak{H}/\mathfrak{F}$ eine zu p gehörige primäre Gruppe wird und daß $\tilde{E}$ nicht in $\tilde{\mathfrak{F}}$ enthalten ist. Sei F die Nebenschar von $\mathfrak{F}$, für die $\tilde{E} < \tilde{F}$. Ist p^k die Ordnung von F als Element von $\mathfrak{H}/\mathfrak{F}$ und ist $k > l$, so ist die Ordnung von $\tilde{E}$ kein Obermodul von $\tilde{\mathfrak{a}}$. Im Falle $k \leqq l$ ist, wenn A ein Element von F bedeutet, die Gleichung $X^{p^{l-k+1}} = A^{p^l}$ in $\mathfrak{F}$ nicht lösbar, da sonst in der Schar $A^{p^{k-1}} \cdot \mathfrak{F} + \mathfrak{F}$ ein Element mit einem Teiler von p^l als Ordnung vorkäme. Es gibt daher eine Gruppe $\mathfrak{F}' < \mathfrak{F}$, die $A^{p^{l+1}}$, nicht aber A^{p^l} enthält und deren Komplement in $\mathfrak{F}$ durch $A^{p^k} \cdot \mathfrak{F}$ erzeugt wird. Die Ordnung jeder in F enthaltenen Nebenschar F' von $\mathfrak{F}'$ ist p^{l+1}. In einer der Scharen $\widetilde{F'}$ muß aber $\tilde{E}$ enthalten sein. Daher ist die Ordnung von $\tilde{E}$ kein Obermodul von $\tilde{\mathfrak{a}}$.

Hat insbesondere jedes Element von $\mathfrak{H}$ außer dem Einheitselement die Ordnung 0, so hat jedes Element von $\tilde{\mathfrak{H}}$ eine Ordnung $\Delta\widetilde{[p^{+\infty}]} \times \Delta\widetilde{[q^0]}$, wo p gewisse Primzahlen, q die übrigen Primzahlen durchläuft.

Weiter erkennt man leicht: Ist G eine Unterschar der Gruppe $\mathfrak{H}$ und hat G als Unterschar von $\mathfrak{H}$ die Ordnung a, so hat $\tilde{G}$ als Unterschar von $\tilde{\mathfrak{H}}$ die Ordnung $\bmod \tilde{a}$, wenn $a \neq 0$ ist. Ist $a = 0$ und b die Ordnung von G als Element von $\mathfrak{H}/G$, so hat $\tilde{G}$ die Ordnung $\Delta\widetilde{[p^{+\infty}]} \times \Delta\widetilde{[q^0]}$, wenn p alle in b aufgehenden, q alle übrigen Primzahlen durchläuft. Die Ordnung der Unterschar $\tilde{G}$ von $\tilde{\mathfrak{H}}$ ist also nicht schon durch die Ordnung von G als Unterschar von $\mathfrak{H}$ bestimmt. Man muß noch die Ordnung von G als Element von $\mathfrak{H}/G$ kennen.

Hat das Element A der realen Gruppe $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}$ die Höhe $\mathfrak{a}$, so hat $\tilde{A}$ in $\tilde{\mathfrak{H}}$ die Höhe $\tilde{\mathfrak{a}}$.

Beweis. Ist $1:r$ eine nicht in $\mathfrak{a}$ enthaltene Zahl, so gibt es eine große Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$, für welche die Gleichung $X^r = A\mathfrak{G}$ nicht lösbar ist. Ist $\mathfrak{b}$ die Höhe von $A\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$, also $\tilde{\mathfrak{b}}$ die Höhe von $\widetilde{A\mathfrak{G}}$, so ist daher $\mathfrak{a} = \Delta\mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{G}$ alle großen Untergruppen $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$ durchläuft. Da $\mathfrak{b} \geqq \bmod 1$, schließt man daraus, daß die Höhe $\Delta\tilde{\mathfrak{b}}$ von $\tilde{A}$ gleich $\tilde{\mathfrak{a}}$ ist.

Hieraus folgt: Ist $\mathfrak{G}$ die Gruppe der Elemente von $\mathfrak{H}$, deren Höhen Obermoduln von $\mathfrak{a}$ sind, so ist die Höhe jedes Elementes von $\tilde{\mathfrak{G}}$ ein Obermodul von $\tilde{\mathfrak{a}}$. Es können aber auch noch weitere Elemente von $\tilde{\mathfrak{H}}$ eine solche Höhe haben.

Weiter ergibt sich: Ist $\mathfrak{G} < \mathfrak{H}$ und ist $\tilde{\mathfrak{G}}$ eine Servanzuntergruppe von $\tilde{\mathfrak{H}}$, so ist auch $\mathfrak{G}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{H}$. Umgekehrt:

Ist $\mathfrak{G}$ eine Servanzuntergruppe der realen Gruppe $\mathfrak{H}$, so ist $\tilde{\mathfrak{G}}$ eine Servanzuntergruppe von $\tilde{\mathfrak{H}}$.

Beweis. Ist $\tilde{A}$ ein Element von $\tilde{\mathfrak{G}}$ und ist die Gleichung $\tilde{X}^r = \tilde{A}$ in $\tilde{\mathfrak{G}}$ nicht lösbar, so gibt es eine große Untergruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$, für welche die Gleichung $Y^r = A\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}$ nicht lösbar ist. Da $\mathfrak{G}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{H}$ ist, schließt man, daß die Gleichung auch in $\mathfrak{H}$ unlösbar ist. Jetzt folgt aber aus dem obigen Satz über die Höhe, daß die Gleichung $\tilde{Y}^r = \widetilde{A\mathfrak{F}}$, also erst recht die Gleichung $\tilde{X}^r = \tilde{A}$ in $\tilde{\mathfrak{H}}$ keine Lösung besitzt.

§ 16.

Theorem IV. *Für jede reale Gruppe $\mathfrak{H}$ kann man eine ideale Untergruppe $\tilde{\mathfrak{E}}^*$ so bestimmen, daß erstens keine Nebenschar von $\tilde{\mathfrak{E}}^*$ mehr als ein Element von $\tilde{\mathfrak{H}}$ enthält, das zu einem realen Element von $\mathfrak{H}$ gehört, und zweitens $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{E}}^*$ der direkte Durchschnitt von Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{F}}_\varrho$ des Ranges 1 ist.*

Beweis. Sei $\mathfrak{E} = \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ eine der in I. § 14 konstruierten wohlgeordneten Mengen von Servanzuntergruppen von $\mathfrak{H}$. Jedoch soll unter den $\mathfrak{G}_\varrho$ die Gruppe $\mathfrak{A}$ der Elemente von $\mathfrak{H}$ mit von 0 verschiedener Ordnung vorkommen. Jedes Element von $\mathfrak{H}/\mathfrak{A}$ hat dann die Ordnung 0. Nach § 15 ist für jede Ordnungszahl ϱ die Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}_{\varrho+1}/\tilde{\mathfrak{G}}_\varrho$ eine Servanzuntergruppe des Ranges 1 von $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}_\varrho$. Man kann, je nachdem ob $\mathfrak{G}_\varrho < \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{G}_\varrho \geqq \mathfrak{A}$ ist, nach § 12, 4. oder § 12, 5. eine Gruppe $\tilde{\mathfrak{F}}_\varrho$ so bestimmen, daß $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}_\varrho$ der direkte Durchschnitt von $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{G}}_{\varrho+1}$ und $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{F}}_\varrho$ wird. Da für $\sigma > \varrho$ stets $\tilde{\mathfrak{F}}_\sigma > \tilde{\mathfrak{G}}_{\varrho+1}$ ist, sind alle Gruppen $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{F}}_\varrho$ voneinander unabhängig. Ferner enthält $\tilde{\mathfrak{E}}^* = \Delta\tilde{\mathfrak{F}}_\varrho$ außer $\tilde{\mathfrak{E}}$ kein Element von $\tilde{\mathfrak{H}}$, das zu einem

realen Element von $\mathfrak{H}$ gehört. Ist die Menge der $\mathfrak{G}_\varrho$ unendlich, so ist aber im allgemeinen $\tilde{\mathfrak{E}}^* > \tilde{\mathfrak{E}}$. — Aus dem Beweis ergibt sich noch:

Zusatz. *Die Gruppen $\tilde{\mathfrak{F}}_\varrho$ können so gewählt werden, daß, bei geeigneter Wohlordnung der $\tilde{\mathfrak{F}}_\varrho$, die realen Elemente von $\mathfrak{H}$, zu denen Elemente von $\Delta_{\sigma \geqq \varrho} \tilde{\mathfrak{F}}_\sigma$ gehören, für jede Ordnungszahl ϱ eine Servanzuntergruppe $\mathfrak{G}_\varrho$ von $\mathfrak{H}$ bilden und daß $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{F}}_\varrho$ zu $\tilde{\mathfrak{G}}_{\varrho+1}/\tilde{\mathfrak{G}}_\varrho$ isomorph ist. Die Zuordnung der Elemente dieser idealen Gruppen zueinander kann so erfolgen, daß die Nebenscharen von $\tilde{\mathfrak{F}}_\varrho$, welche zu realen Elementen von $\mathfrak{H}$ gehörige Elemente enthalten, den realen Elementen von $\mathfrak{G}_{\varrho+1}/\mathfrak{G}_\varrho$ entsprechen.*

Auch die Gruppe $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{E}}^*$ bildet eine Erweiterung der realen Gruppe $\mathfrak{H}$. Aber diese Gruppe ist nicht unabhängig von jeder Darstellung von $\mathfrak{H}$ definierbar. Sie besitzt jedoch trotzdem gewisse Eigenschaften, welche sie als Grundlage für die Untersuchung der realen Gruppen geeignet erscheinen lassen.

Sind $A_1, \ldots, A_n$ und B reale Elemente von $\mathfrak{H}$, so besteht eine Gleichung

$$\Pi (\tilde{A}_\nu^{a_\nu} \tilde{\mathfrak{E}}^*) = \tilde{B}\, \tilde{\mathfrak{E}}^*$$

nur dann, wenn

$$\Pi A_\nu^{a_\nu} = B$$

ist. Denn $\widetilde{B^{-1} \Pi A_\nu^{a_\nu}}$ ist in $\tilde{\mathfrak{E}}^*$ enthalten.

Ist $\mathfrak{a}$ die Ordnung von $A < \mathfrak{H}$, so folgt für $\mathfrak{a} \neq 0$ hieraus, daß $\tilde{\mathfrak{a}}$ die Ordnung von $\tilde{A}\tilde{\mathfrak{E}}^*$ in $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{E}}^*$ ist. Für $\mathfrak{a} = 0$ ergibt sich dies so: Sei

$$\operatorname{grp} A \times \mathfrak{G}_\sigma = \mathfrak{E}, \qquad \operatorname{grp} A \times \mathfrak{G}_{\sigma+1} = \operatorname{grp} A^a \neq \mathfrak{E}.$$

Dann hat $A^a \mathfrak{G}_\sigma$ die Ordnung 0, folglich $\widetilde{A^a \mathfrak{G}_\sigma}$, weiter $\widetilde{A^a \mathfrak{F}_\sigma}$ und $\tilde{A}^a \tilde{\mathfrak{E}}^*$ und $\tilde{A}\tilde{\mathfrak{E}}^*$ die Ordnung $\tilde{0}$. Für die Höhe gilt ein entsprechender Satz. Dieser ist ein Spezialfall des allgemeinen Satzes:

Genügen die Gruppen $\tilde{\mathfrak{F}}_\varrho$ den Bedingungen des Zusatzes zu Theorem IV, so ist für reale Elemente A_μ von $\mathfrak{H}$ ein System von endlich vielen Gleichungen

$$\Pi \tilde{X}_\nu^{a_{\mu\nu}} = \tilde{A}_\mu\, \tilde{\mathfrak{E}}^*$$

nur dann durch Elemente von $\tilde{\mathfrak{H}}/\tilde{\mathfrak{E}}^*$ lösbar, wenn die Gleichungen

$$\Pi X_\nu^{a_{\mu\nu}} = A_\mu$$

durch reale Elemente von $\mathfrak{H}$ lösbar sind.

Mittels der in I. § 14 angewandten Methode erkennt man, daß der Satz nur für den Fall einer Gruppe $\mathfrak{H}$ vom Range 1, in dem dann $\tilde{\mathfrak{E}}^* = \tilde{\mathfrak{E}}$ wird, bewiesen zu werden braucht.

Erstens enthalte $\mathfrak{H}$ kein Element der Ordnung 0. Dann ist $\mathfrak{H}$ das neigentliche direkte Produkt von primären Gruppen des Ranges 1. Die ndlich vielen Elemente A_μ sind schon in einem Produkt $\mathfrak{F}$ endlich vieler ieser Gruppen enthalten. Ist nun das Gleichungssystem $\Pi \tilde{X}_\nu^{a_{\mu\nu}} = \tilde{A}_\mu$ $\tilde{\mathfrak{H}}$ lösbar, so besitzt es, da $\tilde{\mathfrak{F}}$ ein direkter Faktor von $\tilde{\mathfrak{H}}$ ist, bereits $\tilde{\mathfrak{F}}$ ein Lösungssystem $\tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_n$. Da $\mathfrak{E}$ eine große Untergruppe von ist, gehören die idealen Elemente $\tilde{B}_\nu$ zu realen Elementen B_ν. Für iese ist dann $\Pi B_\nu^{a_{\mu\nu}} = A_\mu$.

Zweitens sei $\mathfrak{H}$ zu einem Modul $\mathfrak{a}$ isomorph. Man kann dann $\mathfrak{H} = \mathfrak{a}$ etzen und überdies annehmen, daß $\mathfrak{a} \geqq \text{mod } 1$ ist. Die Lösungen des leichungssystems

$$\sum \tilde{a}_{\mu\nu} \tilde{x}_\nu = \tilde{a}_\mu$$

ndet man aus den Lösungen der Kongruenzen

$$\sum \tilde{a}_{\mu\nu} \tilde{x}_\nu \equiv \tilde{a}_\mu \, (\overbrace{[p^{+\infty}]})$$

r die einzelnen Primzahlen p. Die allgemeine Lösung eines solchen ongruenzensystems ergibt sich als ein System von Linearformen, deren oeffizienten $\tilde{b}_{\varkappa\nu}$ aus den $\tilde{a}_\mu$ und $\tilde{a}_{\mu\nu}$ rational gebildet sind, also zu realen ahlen, $b_{\varkappa\nu}$, gehören, wenn dies bei den $\tilde{a}_\mu$ und $\tilde{a}_{\mu\nu}$ der Fall ist. Da dann ach keine p-Komponente einer Determinante aus den $\tilde{a}_{\mu\nu}$ und $\tilde{a}_\mu$ gleich $\tilde{0}_p$ erden kann, ohne daß die Determinante selbst verschwindet, kann man e Zahlen $\tilde{b}_{\varkappa\nu}$ für alle Primzahlen gleich wählen. Die allgemeine Lösung s gegebenen Gleichungssystems hat daher die Form

$$\tilde{x}_\nu = \tilde{b}_{0\nu} + \tilde{b}_{1\nu} \tilde{y}_1 + \tilde{b}_{2\nu} \tilde{y}_2 + \ldots + \tilde{b}_{k\nu} \tilde{y}_k,$$

o für die $\tilde{y}_\varkappa$ beliebige ideale Zahlen eingesetzt werden können. Mögen e $\tilde{y}_\varkappa$ nun so bestimmt sein, daß alle $\tilde{x}_\nu$ in $\tilde{\mathfrak{a}}$ enthalten sind. Sind für e ganze Zahl d alle Produkte $b_{\varkappa\nu} d$ ganz, so kann man zunächst $\tilde{y}_\varkappa$ so ählen, daß für jede nicht in d aufgehende Primzahl p die p-Komponente n $\tilde{y}_\varkappa$ von $\tilde{0}_p$ wird. Weiter bleibt auch dann noch $\tilde{x}_\nu < \tilde{\mathfrak{a}}$, wenn $\tilde{y}_\varkappa$ durch $\equiv \tilde{y}_\varkappa \, (\text{mod } \tilde{d})$ ersetzt wird. Die idealen Zahlen $\tilde{y}_\varkappa$ können demnach so wählt werden, daß sie zu realen Zahlen $y_\varkappa$ gehören. Dann genügt aber

$$x_\nu = b_{0\nu} + \sum b_{\varkappa\nu} y_\varkappa < \mathfrak{a}$$

n Gleichungen $\sum a_{\mu\nu} x_\nu = a_\mu$.

Aus dem bewiesenen Satze folgt noch:

Sind $A_1, \ldots, A_m$ endlich viele Elemente der Gruppe $\mathfrak{H}$, so ist das leichungssystem $\Pi X_\nu^{a_{\mu\nu}} = A_\mu$ durch reale Elemente von $\mathfrak{H}$ lösbar, wenn s Gleichungssystem $\Pi \tilde{X}_\nu^{a_{\mu\nu}} = \tilde{A}_\mu$ durch Elemente von $\tilde{\mathfrak{H}}$ lösbar ist.

(Eingegangen am 15. Mai 1923.)

Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.

Von

Adolf Fraenkel in Marburg (Lahn).

Inhaltsübersicht.

Vorbemerkungen.
§ 1. Das Axiomensystem.
§ 2. Nächste Folgerungen aus den Axiomen.
§ 3. Theorie der Äquivalenz.
§ 4. Die abzählbar unendlichen Mengen.

Der unter obigem Titel im 65. Band der Math. Annalen (1908) erschienene bahnbrechende Aufsatz Herrn E. Zermelos (im folgenden mit Z zitiert) bildet bis heute die wesentliche Basis für den Aufbau der Mengenlehre im axiomatischen Sinn, dem die metamathematischen Tendenzen (Julius König, Hilbert-Bernays, auch noch Whitehead-Russell) vorzugsweise ergänzend, die mehr oder weniger intuitionistisch gefärbten Auffassungen (Brouwer, Weyl, Chwistek u. a.) als wesentlich verschieden gegenüberstehen. Ohne zu dieser grundlegenden Meinungsverschiedenheit, für die auf eine anderweitige Erörterung[1]) verwiesen sei, Stellung zu nehmen, gilt die folgende Entwicklung ausschließlich der klassisch-axiomatischen Begründung. Deren Durchführung durch Zermelo hatte früher im wesentlichen nur unter dem intuitionistischen Gesichtswinkel (so namentlich bei Poincaré) Kritik gefunden; seit mehreren Jahren sind gegen sie indes Einwände[2])

---

[1]) A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 2. Auflage (Berlin 1923) §§ 12 und 13; im folgenden als „Mengenlehre" zitiert. Für Literaturangaben zu den obigen Vorbemerkungen ist vielfach auf dieses Buch zu verweisen.

[2]) Siehe meine Noten in den Math. Annalen 86 (1922), S. 230 ff. und in den Sitzungsber. d. Preuß. Akademie d. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Klasse, 1922, S. 253 (sowie die entsprechenden Vorträge auf den deutschen Mathematikertagen 1921 und 1922), ferner Th. Skolems (nur zum Teil intuitionistisch gefärbte) Bemerkungen in seinem Vortrag auf dem Helsingforser Mathematikerkongreß 1922 (Helsingfors 1923, S. 217–232).

hoben worden, die auch vom klassischen Standpunkt aus wesentlich sind. on diesen Einwänden ist derjenige weitaus der gewichtigste, der ermelos Kennzeichnung einer „definiten Eigenschaft" und damit das xiom der Aussonderung betrifft; liegt doch hier eine wesentliche Beeinächtigung der Haupttendenz der axiomatischen Methode vor, nämlich des estrebens, der Willkür in der Bildung von Mengen zu steuern mittels harfer Umgrenzung der erlaubten Prozesse. Während Skolem die beichnete, von Zermelo selbst deutlich empfundene Lücke durch Heranehung von Begriffen des Logikkalküls auszufüllen vorschlägt, wovon eine urchführung bisher nicht vorliegt, habe ich eine Umgestaltung des Axioms r Aussonderung — d. h. des Prozesses der erlaubten Teilmengenbildung — gegeben, die allein mit den Begriffen der Axiomatik der Mengenlehre periert und zunächst wesentlich enger scheint als Zermelos Fassung[3]). as einzige hiergegen verschiedentlich erhobene Bedenken liegt in dem weifel, ob mit der gewonnenen Präzision die veränderte Axiomatik nicht e Fähigkeit verliere, das Gesamtgebiet der allgemeinen Mengenlehre zu nfassen. Diesen Zweifel durch die tatsächliche Durchführung zu widergen, und zwar zunächst für die allgemeine Theorie der Äquivalenz einhließlich des speziellen unentbehrlichen Begriffs der abzählbaren Mengen, das Ziel des folgenden Aufsatzes. Er wird gleichzeitig einige vermeintche Schwierigkeiten bezüglich der Anwendung des neuen Axioms auflösen.

Ausgeschlossen bleibt also zunächst die Theorie der Ordnung und ohlordnung, ferner die Betrachtung der speziellen Mächtigkeiten. Erstere heorie ist bisher überhaupt noch nicht auf der Zermeloschen Grundlage twickelt; während die Hinweise der Herren Hessenberg und Hartogs ch der Ausführung harren, benutzt die systematische Entwicklung errn J. v. Neumanns[4]) außer Zermelos Axiomen sehr wesentlich n weiteres, von mir aushilfsweise in Vorschlag gebrachtes Axiom (vgl. chstehend Nr. 28), das indes als zu weitgehend erscheinen dürfte, um ne sorgfältige Prüfung seiner Notwendigkeit herangezogen zu werden. b auch die allgemeine Theorie der Ordnung aus den bisherigen Axiomen twickelt werden kann, oder ob sich, wie es noch unveröffentlichte Ariten J. v. Neumanns entwickeln[5]), eine wesentlich andere axiomatische

[3]) Skizziert an der zweitgenannten Stelle der vorigen Fußnote, ausgeführt engenlehre S. 197ff. und namentlich Scripta univ. atque biblioth. Hierosol., Math. phys. 1 (1923), Nr. VI. Man findet demgemäß dort schon im wesentlichen den halt des § 1, der aber im folgenden des Zusammenhangs wegen nicht entbehrt rden konnte.

[4]) Acta litterarum ac scientiarum reg. universitatis Hung. Francisco-Josephinae, t. sc. math. 1 (Szeged 1923), S. 199—208.

[5]) Eine von ihnen (unter dem Titel: „Eine Axiomatisierung der Mengenlehre" rd demnächst im Journal f. Math. erscheinen.

Grundlage empfiehlt, diese Frage zu beantworten bleibe einem (z. Z. in Fertigstellung begriffenen) zweiten Aufsatze vorbehalten.

Daß Zermelos Axiome für die Behandlung gewisser (sehr großer) Mächtigkeiten nicht ausreichen und wie sie etwa zu ergänzen sind, findet man an den oben genannten Stellen erörtert; vgl. auch nachstehend § 4, Nr. 2. Diese spezielle Frage, die übrigens mit der im vorigen Absatz erwähnten enge verknüpft ist, wird als für die allgemeine Theorie und ihre Anwendungen nebensächlich beiseite gelassen, ebenso das Problem der Notwendigkeit bzw. Möglichkeit einer weiteren Beschränkung des Mengenbegriffs, um dem Axiomensystem einen kategorischen Charakter zu verleihen[6]).

Das folgende Axiomensystem weicht, abgesehen von dem entscheidenden Moment der Teilmengenbildung, von Zermelo in gewissen weiteren näher zu bezeichnenden Punkten ab. Die anschließende Entwicklung dagegen folgt, bis auf die Einordnung der Theorie der Zahlenreihe, der Darstellung in Z. nach Gliederung und Gedankengang so eng als irgend möglich (namentlich im § 3, der dem § 2 von Z. entspricht). Damit soll der Vergleich erleichtert und unter Ausschaltung jeder anderen Schwierigkeit der Nachdruck lediglich auf die ohnehin sehr abstrakten neuen Prozesse der Mengenbildung gelegt werden. Besonders hervorgehoben seien die (neuen) letzten Sätze des § 2, deren Anwendungsfähigkeit sich noch bei weiteren Problemen zeigen wird. Der Kürze halber werden die wenigen Partien, in denen die Verwendung der neuen Hilfsmittel und daher eine Abweichung von Z. nicht nötig ist, durch den Verweis auf diese (nach wie vor für die Axiomatisierung der Mengenlehre grundlegende) Arbeit Zermelos erledigt.

Der Gegensatz zum intuitionistischen Standpunkt tritt nicht allein in der Verwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten hervor — vor allem in der Auffassung, daß a entweder Element einer Menge b ist oder es nicht ist —, sondern auch in dem durch die Potenzmengenbildung bedingten imprädikativen Prozeß[7]). Dagegen wird das den Intuitionisten bisher als ein Hauptpunkt der Kritik dienende[8]) Verfahren, die Mengen- bzw. Teilmengenbildung auf den Begriff einer „Eigenschaft" zu gründen, völlig vermieden. Die dadurch erreichte Beschränkung der Differenzpunkte wird wenigstens der *Klärung* der Gegensätze dienlich sein.

---

[6]) Mengenlehre, S. 218f. und 227f. Vgl. auch diese Zeitschrift **13** (1922), S. 163.

[7]) Vgl. meinen im Jahresber. d. Deutschen Math.-Vereinigung **33** (1924), S. 97ff. abgedruckten Vortrag.

[8]) Vgl. L. E. J. Brouwer, ebenda **28** (1919), S. 203.

§ 1.

Das Axiomensystem.

Die folgende Axiomatik hat es mit gewissen Objekten zu tun, die ir *Mengen* nennen und deren Existenz, unter Ausschluß jeder inhaltlichen etrachtung, formal aus den Axiomen zu erschließen ist. Zwischen je wei Mengen a und b können *Grundbeziehungen* der Form $a = b$ und εb sowie ihre Negationen $a \neq b$ und $a \varepsilon b$ bestehen. Die Grundbeziehung $= b$ (a gleich b; Gegensatz: verschieden) sagt aus, daß a und b die näm-che Menge (in einem durch Axiom I präzisierten Sinn) bezeichnen, und at wie üblich, außer Reflexivität, Symmetrie und Transitivität, noch die igenschaft, daß aus $m \varepsilon n$, $m = m'$, $n = n'$ stets $m' \varepsilon n'$ folgt; der Ein-chheit halber werden diese Eigenschaften hier vorangestellt. $a \varepsilon b$ wird lesen: a ist Element von b, a ist in b enthalten, b enthält a als lement usw.

Definition 1. Sind m und n Mengen von der Art, daß jedes lement von m auch Element von n ist, so heißt m eine *Teilmenge* on n; in Zeichen: $m \leqq n$. Ist $m \neq n$, so spricht man von einer *echten eilmenge* m von n.

Es ist also stets $m \leqq m$. Aus $m \leqq n$, $n \leqq p$ folgt $m \leqq p$.

Definition 2. Sind m und n Mengen von der Art, daß kein Ele-ent von m gleichzeitig Element von n ist, so heißen m und n *elemente-emd*. Sind je zwei Elemente einer Menge M elementefremd, so heißen ie Elemente von M *paarweise elementefremd*.

Axiom I. Ist gleichzeitig $m \leqq n$ und $n \leqq m$ (d. h. gehört jedes lement von m zu n und umgekehrt), so ist $m = n$. (*Axiom der Be-immtheit.*)

Eine Menge m ist also bestimmt durch ihre sämtlichen Elemente , b, c, ... Man deutet dies an durch die Schreibweise $m = \{a, b, c, \ldots\}$.

Definition 3. Sind a, b, m Mengen von der Art, daß $a \neq b$ und aß sowohl a wie b, aber keine andere Menge Element von m ist, so eißt $m = \{a, b\}$ ein (nach Axiom I: das) *Paar von a und b*.

Definition 4. Sind m und M Mengen von der Art, daß M alle eilmengen von m (Definition 1) und nur sie als Elemente enthält, so eißt $M = \mathfrak{U}m$ eine (nach Axiom I: die) *Potenzmenge von m*.

Definition 5. Sind m und s Mengen von der Art, daß s alle Ele-ente *der Elemente von m* und nur sie als Elemente enthält, so heißt $= \mathfrak{S}m$ eine (nach Axiom I: die) *Vereinigungsmenge von m*.

Wir bedürfen weiter, an Stelle des unbestimmten Begriffs einer de-niten Aussage, der Einführung eines *Funktionsbegriffs* auf definitorischem

Wege. Wird eine Menge x unbestimmt oder variabel gelassen — in letzterem Fall durchläuft x die Elemente einer gewissen Menge —, so werden im allgemeinen ihre Potenz- und Vereinigungsmenge wiederum von x abhängig, also unbestimmt bzw. variabel sein, ebenso das Paar von x und einer anderen (gleichfalls von x abhängigen oder konstanten, d. h. fest gegebenen) Menge; ein Paar dieser Art nennen wir kurz ein von x abhängiges Paar.

Definition 6. a) Die Potenzmenge von x, die Vereinigungsmenge von x, ein von x abhängiges Paar werden, ebenso wie jede konstante Menge, als *Funktionen von* x bezeichnet. Eine Funktion einer Funktion von x heißt wiederum eine *Funktion von* x.

b) Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gegebene Funktionen von x, $\circ$ eine gegebene der vier Grundbeziehungen $=$, $\neq$, ε, $\notin$. Sind dann m und m' Mengen von der Art, daß m' alle diejenigen Elemente y von m und nur sie als Elemente enthält, für die die Beziehung $\varphi(y) \circ \psi(y)$ gilt, so heißt m' eine (nach Axiom I: die) *durch* $\varphi \circ \psi$ *bestimmte Aussonderungsmenge von* m, in Zeichen: $m' = m_{\varphi(y) \circ \psi(y)}$. Die Variable, die die Elemente der Ausgangsmenge m zu durchlaufen hat und für die man die Bezeichnung y nicht durchwegs reservieren kann, wird zur Vermeidung eines Mißverständnisses stets *fett gedruckt*.

c) Ist $m' = m_{\varphi(y) \circ \psi(y)}$ und ist m eine Funktion der Unbestimmten x oder geht in die Funktionen φ und ψ (abgesehen von der Hilfsvariabeln y) die Unbestimmte x ein, so heißt m' (als im allgemeinen von x abhängig) eine *Funktion von* x.

Hiernach ist jede Aussonderungsmenge von m eine Teilmenge von m, aber nicht umgekehrt (vgl. Axiom VI). Beispiele zur Bildung von Funktionen, insbesondere auch nach c), treten in den folgenden Paragraphen fortwährend auf. Obgleich nach Definition 6, die offenbar ein induktives Verfahren enthält, sich die Bildung von Funktionen und daher auch von Aussonderungsmengen mittels *endlicher* Prozesse vollzieht, gelingt es dennoch damit das Diagonalverfahren, d. h. den Übergang von einer beliebigen Mächtigkeit zu einer größeren, durchzuführen (§ 3, Nr. 25).

Axiom II. Zu je zwei verschiedenen Mengen a und b existiert ihr Paar $\{a, b\}$. (*Axiom der Paarung.*)

Axiom III. Zu jeder Menge m existiert ihre Potenzmenge $\mathfrak{U}m$. (*Axiom der Potenzmenge.*)

Axiom IV. Zu jeder Menge m existiert ihre Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}m$. (*Axiom der Vereinigung.*)

Axiom V. Zu jeder Menge m und je zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ existiert, falls $\circ$ eine beliebige der Grundbeziehungen bedeutet, die Aussonderungsmenge $m_{\varphi(y) \circ \psi(y)}$. (*Axiom der Aussonderung.*)

Axiom VI. Ist m eine Menge von paarweise elementefremden Elementen, deren jedes mindestens ein Element enthält, so existiert mindestens eine Menge — eine *Auswahlmenge von* m —, die mit jedem Element von m ein einziges Element gemeinsam hat, aber sonst keine Elemente enthält. (*Axiom der Auswahl.*)

Jede Auswahlmenge von m ist hiernach eine Teilmenge der Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}m$, ohne daß sie eine Aussonderungsmenge von $\mathfrak{S}m$ zu sein braucht (vgl. Mengenlehre, S. 203 und 225f). Von den Voraussetzungen dieses Axioms bedeutet die erste eine Beschränkung (also Vereinfachung); wie in C. soll die *Forderung* der Existenz der Auswahlmenge nur für Mengen elementefremder Mengen aufgestellt werden, während für andere Mengen sich jene Existenz dann beweisen läßt (§ 3, Nr. 21). Dagegen ist die zweite Voraussetzung, daß jedes Element von m (ebenso wie m selbst) mindestens ein Element enthält, naturnotwendig; sonst kann eben die Auswahlmenge nicht aus *jedem* Element von m ein Element enthalten. Zu einer Menge m der bezeichneten Art gehören im allgemeinen mehrere Auswahlmengen; vgl. § 2, Nr. 8.

Diese sechs Axiome reichen hin zur Entwicklung der allgemeinen Theorie der Äquivalenz, wie die §§ 2 und 3 zeigen. Dabei bleibt die Existenzfrage allerdings offen, insofern als die Axiome nicht verbürgen, daß es überhaupt Mengen gibt. Somit wäre an sich die Forderung der *Existenz mindestens einer Menge* zum Abschluß nötig. Indes kann von ihr hier abgesehen werden, weil ohnehin zur Sicherung spezieller Mengen (z. B. unendlicher Mengen überhaupt) eine weitergehende Existenzforderung nötig wird, die jene allgemeine in sich enthält (siehe § 4, Axiom VII).

Abgesehen von dem entscheidenden Punkt, nämlich dem Axiom der Aussonderung, und von bloß formalen Abweichungen (z. B. der Nichteinführung des „Bereiches“ $\mathfrak{B}$ von Z.) weist das obige Axiomensystem zwei Unterschiede gegen das Zermelosche auf. Einmal werden hier die Grundbeziehungen $=$ und ε ausdrücklich als gleichberechtigt aufgefaßt, während in Z. die Gleichheit, in Axiom II implizit verwendet, auf die Beziehung ε formal zurückgeführt wird; hierdurch und durch Ausnutzung des Axioms der Aussonderung läßt sich vorstehend Axiom II auf die Forderung der Paarmenge beschränken, während das entsprechende Axiom („der Elementarmengen“) von Z. noch die in § 2, Nr. 1 und 2, bezeichneten Mengen postuliert, deren Existenz hier *beweisbar* ist. Die zweite, tiefergehende Differenz liegt darin, daß hier nur *Mengen* betrachtet werden, d. h. nur solche Objekte (bis auf die Nullmenge; § 2, Nr. 1), die ihrerseits Objekte „enthalten“. Demgemäß besagt das Axiom der Bestimmtheit hier, daß es höchstens *ein* Objekt a geben kann, für das die Beziehung $x \varepsilon a$ unerfüllbar ist. Das dem Wortlaut nach gleiche Axiom I von Z. gibt dagegen

der Natur der Elemente von Mengen unbeschränkte Freiheit und läßt somit den Umfang des durch die Axiomatik zu beherrschenden Gebietes völlig unbestimmt. Inwieweit den rein methodisch einleuchtenden Vorzügen des vorliegenden Standpunktes etwa Schwierigkeiten bei der *Anwendung* auf andere Gebiete gegenüberstehen können, ist hier nicht der Ort zu untersuchen.

Betreffs der *Unabhängigkeit* des Axiomensystems genüge der Verweis auf die zwei ersten in Fußnote [2]) angeführten Arbeiten und auf Mengenlehre, S. 191—196 und 224—226. Nur die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms, a. a. O. für Zermelos Axiomensystem mit dem verschärften Aussonderungsaxiom bewiesen, bedarf wegen der soeben erwähnten (zweiten) Abweichung nunmehr eines besonderen, noch ausstehenden Nachweises.

Die Axiome werden nachstehend mit ihren bloßen Nummern angeführt.

§ 2.

Nächste Folgerungen aus den Axiomen.

1. *Falls überhaupt eine Menge existiert, so gibt es eine einzige Nullmenge* 0, *die kein Element enthält.*

Auf eine beliebige Menge a werde V mit $y = \varphi(y)$, $a = \psi(y)$, $\varepsilon = \circ$ angewandt. Da für *kein* Element y von a die Beziehung $y \varepsilon a$ gilt, so enthält $0 = a_{y \varepsilon a} \leqq a$ überhaupt kein Element. Durch diese Eigenschaft ist 0 nach I eindeutig bestimmt; 0 ist also unabhängig von a.

Nach Definition 1 hat die Nullmenge außer sich selbst keine Teilmenge, sie ist dagegen Teilmenge *jeder* Menge.

2. *Zu jeder Menge* a *gibt es eine einzige Menge* $\{a\}$, *die* a *und kein weiteres Element enthält.*

Zunächst gibt es außer a noch mindestens eine weitere Menge b. Das folgt für $a \neq 0$ aus Nr. 1 ($b = 0$); für $a = 0$ wähle man etwa die nach III existierende Menge $b = \mathfrak{U}\, 0 = \{0\}$, die von 0 verschieden ist, weil $0 \varepsilon \{0\}$, während in 0 kein Element enthalten ist. Nach II existiert daher das Paar $\{a, b\} = m$, also nach V die Menge $m_{y=a} \leqq m$ (d. h. die Menge der mit a zusammenfallenden Elemente y von m), die wegen $b \neq a$ das einzige Element a enthält und hierdurch nach I festgelegt ist.

Hiermit ist der Inhalt des Axioms der Elementarmengen aus Z. nachgewiesen. Die Beziehung $a = b$ bzw. $a \neq b$ kann nunmehr in der Form $a \varepsilon \{b\}$ bzw. $a \varepsilon \{b\}$ geschrieben, d. h. die Grundbeziehungen $=$ und $\neq$, deren zweite überhaupt nicht benutzt wurde, könnten von nun an entbehrt werden.

Die (stets von 0 verschiedene) Menge $\{a\}$ besitzt nur die Teilmengen 0 d $\{a\}$, ihre Potenzmenge ist also $\{0, \{a\}\}$.

Der zur Bildung von $\{a\}$ aus a inverse Prozeß vollzieht sich nach IV rch $\mathfrak{S}\{a\} = a$, wie im folgenden oft benutzt werden wird.

3. *Jede Teilmenge* $m_1 \leqq m$ *bestimmt eine Komplementärmenge* $m - m_1 \leqq m$, der alle *nicht* zu m_1 gehörigen Elemente von m und nur als Elemente angehören. Es ist nämlich $m - m_1 = m_{y \varepsilon m_1}$. Stets gilt $- 0 = m$, $m - m = 0$, $m - (m - m_1) = m_1$.

4. *Jede Menge* $m = \{a, b, \ldots\}$ *bestimmt den zu ihr gehörigen Durchhnitt (oder Durchschnitt ihrer Elemente)* $\mathfrak{D}m = [a, b, \ldots]$, der alle die lemente und nur sie enthält, die *jedem* Element von m als Element gehören.

Der Beweis bedarf zum erstenmal einer gemäß Definition 6c) von 1 gebildeten Funktion. x bezeichne eine Unbestimmte, die später die lemente eines Elementes von m durchlaufen wird. Nach V existiert die enge $m_{x \varepsilon y} \leqq m$, d. h. die Menge derjenigen Elemente y von m, in nen die unbestimmte Menge x als Element vorkommt; $m_{x \varepsilon y} = \chi(x) \leqq m$ nach Definition 6c) des § 1 eine Funktion von x (während von y, h. von der fettgedruckten Hilfsvariablen, die Aussonderungsmenge erhaupt nicht abhängt). Weiter sei a ein beliebiges Element von m (der ll $m = 0$ ist offenbar trivial) und es bezeichne $\mathfrak{D}m$ die Menge $a_{\chi(\mathfrak{x}) = m}$, h. die Menge der Elemente x von a, für die $\chi(x) \leqq m$ *alle* Elemente n m umfaßt, also mit m zusammenfällt; $\mathfrak{D}m$ enthält demnach alle e Elemente x von a und nur sie, die gleichzeitig in allen Elementen $b, \ldots$ von m enthalten sind, d. h. $\mathfrak{D}m$ ist der Durchschnitt der engen $a, b, \ldots$.

Der Durchschnitt elementefremder Mengen ist 0.

5. Zu jeder Menge m gibt es mindestens eine Teilmenge $m_0 \leqq m$, e nicht Element von m ist. Es existiert daher keine Menge, die *alle* engen als Elemente enthält.

Zum Beweis braucht man nur $m_0 = m_{y \varepsilon y}$, d. h. gleich der Teilmenge ler nicht sich selbst als Element enthaltenden Elemente von m zu tzen. Wäre dann etwa $m_0 \varepsilon m_0$, so stünde dies im Gegensatz zu der eben kennzeichneten Natur der Elemente von m_0. Also ist $m_0 \varepsilon m_0$, und her kann in der Tat die Teilmenge m_0 von m nicht *Element* von m in, weil sie sonst nach Definition von m_0 auch Element von m_0 wäre.

Es ist zuweilen nützlich, eine *bestimmte* Menge m_0 der gewünschten t einzuführen, z. B. die vorstehend definierte; diese hängt nur von m und ist nach Definition 6c) des § 1 eine Funktion von m.

6. Wie in Z., Nr. 11/12, wird, wenn $m = \{a, b, c, \ldots\}$ ist, die Ver-

einigungsmenge $\mathfrak{S}m$ (Definition 5 des § 1) auch als $a+b+c+\ldots$ ge schrieben und als die *Summe* dieser Mengen bezeichnet. Es gelten fü diese Addition das assoziative und das kommutative Gesetz, ferner di beiden diese Addition mit der Durchschnittsbildung verknüpfenden distri butiven Gesetze:

$$[a+b, c] = [a, c] + [b, c]$$
$$[a, b] + c = [a+c, b+c].$$

Um diese Beziehungen allgemein gebrauchen zu können, läßt man auc die Summenbildung $a+a\,(=a)$ usw. zu.

7. *Für eine Menge a mit einem einzigen Element und nur für ein solche Menge gilt* $a = \{\mathfrak{S}a\}$. Ist $\varphi(x)$ eine Funktion, so bestimm daher eine Menge m stets eine Teilmenge $m_{\varphi(y)=\{\mathfrak{S}\varphi(y)\}}$, die alle di Elemente y von m und nur sie enthält, für die $\varphi(y)$ eine Menge mi einem einzigen Element darstellt.

Enthält $a = \{\alpha\}$ ein einziges Element α, so ist nach IV $\mathfrak{S}a = \alpha$ also $\{\mathfrak{S}a\} = a$. Für $a = 0$ gilt $\mathfrak{S}a = 0$, also $\{\mathfrak{S}a\} = \{0\} \neq a$ Enthält a mindestens zwei verschiedene Elemente, so ist $a \neq \{\mathfrak{S}a\}$, wei letztere Menge nur ein einziges Element enthält. Damit ist die erst Behauptung nachgewiesen, aus der die zweite nach V folgt[9]).

8. *Jede Menge $m = \{a, b, \ldots\}$ von paarweise elementefremden Ele menten bestimmt eine Menge $\mathfrak{P}m$, die Verbindungsmenge von m, di alle diejenigen Teilmengen von $\mathfrak{S}m$ und nur sie als Elemente enthäl in welchen je ein einziges Element aus jedem der Elemente $a, b, \ldots$ von m vorkommt.* $\mathfrak{P}m$ wird auch als *Produkt* der Mengen $a, b, \ldots$ be zeichnet: $\mathfrak{P}m = a \cdot b \ldots$. *$\mathfrak{P}m$ ist dann und nur dann die Nullmeng wenn die Nullmenge Element von m ist.*

Eine Funktion $\chi(x)$ einer Unbestimmten x werde definiert als di Menge derjenigen Elemente y von m, die mit x ein einziges Element gemei haben, d. h. nach Nr. 4 und 7: $\chi(x) = m_{[y,x]=\{\mathfrak{S}[y,x]\}}$. Die Elemente von $\mathfrak{P}m$ sind dadurch zu charakterisieren, daß sie mit *jedem* Elemen von m ein einziges Element gemein haben, d. h. daß für sie $\chi(x) = m$ da die Elemente x von $\mathfrak{P}m$ überdies Teilmengen von $\mathfrak{S}m$, d. h. Element von $\mathfrak{U}\mathfrak{S}m$ sind (nämlich nur Elemente aus Elementen von m enthalten so ist $\mathfrak{P}m = (\mathfrak{U}\mathfrak{S}m)_{\chi(\mathfrak{x})=m}$.

Ist $0 \varepsilon m$, so ist $\mathfrak{P}m = 0$, da keine Menge mit 0 ein Elemen gemeinsam hat. Ist dagegen jedes Element von m von 0 verschieden, s

[9]) Hier ist zum erstenmal eine völlige Abweichung von der in Z. (Nr. 13) befolgte Methode erforderlich. Ebenso wie $a = \{\mathfrak{S}a\}$ ist z. B. auch die Beziehung $\mathfrak{U}a - \{a\} = \{0$ für Mengen a mit einem einzigen Element charakteristisch.

ot es nach VI mindestens eine Auswahlmenge von m, und jede solche ellt ein Element von $\mathfrak{P}m$ dar; in diesem Fall ist also $\mathfrak{P}m \neq 0$.

9. Als Vorbereitung für die schwierigeren Überlegungen des nächsten ıragraphen ist noch *der Prozeß der Aussonderung unter Verwendung der egriffe „alle" und „es gibt"* allgemein zu formalisieren. Der erste dieser egriffe ist in speziellen Fällen schon in den Nummern 4 und 8 heranzogen worden.

In eine Funktion gehen außer der gerade betrachteten Variablen im gemeinen noch andere, zunächst als konstant angesehene Mengen ein. kommt vor, wie schon vorstehend an Beispielen sichtbar wurde, daß he (eventuell sogar mehrere) dieser Mengen unbestimmt gelassen wird, um äterhin — nach Ausschaltung der ursprünglichen Variablen, die als Hilfsriable bei der Anwendung von V auftritt — als Variable betrachtet zu rden. Obgleich der Sache nach bei jedem Schritt nur eine Funktion einer *nzigen* Variablen vorliegt und die Abhängigkeit dieser Funktion von anderen sie eingehenden Mengen anderweitig (etwa durch Indizes) charakterisiert rden könnte, so dient es doch der Einfachheit und Übersichtlichkeit, wenn den beiden nächsten Nummern die *Schreibweise* von Funktionen mehrerer riablen (etwa $\varphi(x, y)$ usw.) benutzt wird. Bei der Verwendung solcher nktionen zur Aussonderung von Teilmengen wird, wie in den Nummern 4 d 8, durch den Fettdruck der gerade variabel gedachten Menge jedes ißverständnis ausgeschlossen und das nur scheinbare Vorhandensein hrerer Variablen zum Ausdruck gebracht.

10. *Sind eine Menge n und zwei Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ geben, so bestimmt jede Menge m eine Teilmenge $m_1 \leqq m$, die all die ements y von m und nur sie enthält, welche für jedes Element x von n r Beziehung $\varphi(x, y) \varepsilon \psi(x, y)$ genügen.* Das nämliche gilt, wenn statt ε he andere der Grundbeziehungen verwandt wird[10]).

Bei unbestimmtem y stellt nämlich $n_{\varphi(\mathfrak{x}, y) \varepsilon \psi(\mathfrak{x}, y)} = \chi(y)$ eine Funktion n y dar, nämlich die (von y abhängige) Teilmenge der $x \varepsilon n$, für die $(x, y) \varepsilon \psi(x, y)$. Daher ist m_1 die Menge derjenigen Elemente y von m, r die $\chi(y)$ *alle* Elemente von n umfaßt, d. h. $m_1 = m_{\chi(y)=n}$.

11. *Sind eine Menge n und zwei Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ geben, so bestimmt jede Menge m eine Teilmenge $m_2 \leqq m$, die all die ements y von m und nur sie enthält, welche für irgendein Element x on n der Beziehung $\varphi(x, y) \varepsilon \psi(x, y)$ genügen.* Das nämliche gilt, enn statt ε eine andere der Grundbeziehungen verwandt wird.

[10]) Daß der obige Satz auch noch gilt, wenn n eine Funktion von y ist, erkennt an an Beispielen in § 4, Nrn. 29 und 31. Der Einfachheit halber wird hier von eser Erweiterung abgesehen.

Bei unbestimmtem y stellt nämlich $n_{\varphi(\mathfrak{x},y)\,\varepsilon\,\psi(\mathfrak{x},y)} = \chi(y) \leqq n$ eine wie in Nr. 10 zu kennzeichnende Funktion von y dar. Daher ist m_2 die Menge derjenigen Elemente y von m, für die $\chi(y)$ *mindestens ein* Element von n enthält, d. h. $m_2 = m_{\chi(y)\neq 0}$.

Geht in die Mengen m, n und in die Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ eine Unbestimmte z (abgesehen von den Hilfsvariablen x und y) ein, so ist die entstehende Menge $m_2 \leqq m$ nach § 1, Definition 6c), eine Funktion von z (vgl. das Beispiel in Nr. 26, zweiter Absatz). Entsprechendes gilt für die vorige Nummer.

12. Die letzte Nummer gestattet den Beweis eines allgemeinen und sehr oft benötigten Existenztheorems:

Ist $\varphi(x)$ eine Funktion, so entsteht aus einer Menge m, falls jedes Element x von m durch die Menge $\varphi(x)$ ersetzt wird, wiederum eine Menge, vorausgesetzt, daß eine Menge M existiert, der all jene Mengen $\varphi(x)$ als Elemente angehören.

Die letzte Bedingung kann nicht fortgelassen werden (vgl. § 4, Nr. 28).

Zum Beweis ist in der letzten Nummer m für n, M für m, $y = \varphi(\mathfrak{x})$ für $\varphi(\mathfrak{x}, y)\,\varepsilon\,\psi(\mathfrak{x}, y)$ einzusetzen. Dann enthält die entstehende Teilmenge von M all die Elemente y von M und nur sie, die für irgendein Element x von m mit der Menge $\varphi(x)$ zusammenfallen. Die Mengen $\varphi(x)$ brauchen übrigens nicht alle untereinander verschieden zu sein (vgl. Nr. 26, zweiter Teil).

Geht in die Mengen m und M sowie in die Funktion $\varphi(x)$ noch eine Unbestimmte z ein, so ist auch die entstehende Teilmenge von M eine Funktion der Unbestimmten z.

§ 3.

Theorie der Äquivalenz.

Definition 1. Wie in Z., Nr. 15, sollen zwei elementefremde Mengen m und n *äquivalent* heißen ($m \sim n$), wenn ihr Produkt $m \cdot n$ (Nr. 8) mindestens eine Teilmenge Φ von der Art besitzt, daß jedes Element von $m + n$ in einem einzigen Element $\{\mu, \nu\}$ von Φ als Element auftritt. Eine (in bezug auf m und n offenbar symmetrische) Menge Φ dieser Art heißt eine *Abbildung zwischen m und n*; zwei Elemente $\mu\,\varepsilon\,m$ und $\nu\,\varepsilon\,n$, die im nämlichen Element von Φ als Elemente auftreten, heißen *einander (durch Φ) zugeordnet*, einander (vermöge Φ) entsprechend, Bilder von einander usw.

Hiernach folgt aus $m \sim n$, $m = m'$, $n = n'$ stets $m' \sim n'$.

13. *Zu je zwei elementefremden Mengen m und n existiert die Menge Ξ aller Abbildungen zwischen ihnen.*

$\Xi \preccurlyeq \mathfrak{U}(m \cdot n)$ enthält nämlich diejenigen Elemente y von $\mathfrak{U}(m \cdot n)$. h. diejenigen Teilmengen y von $m \cdot n$), die für *jedes* $x \varepsilon (m + n)$ die genschaft haben, daß die Menge der x enthaltenden Elemente $z = \{\mu, \nu\}$ n y nur ein einziges Element enthält. Setzt man also gemäß Nr. 7 die nur scheinbar enthaltende) Beziehung $y_{x \varepsilon z} = \{\mathfrak{S} y_{x \varepsilon z}\}$ für die Be- hung $\varphi(x, y) \varepsilon \psi(x, y)$ in Nr. 10 ein, so existiert nach dieser Nummer e Menge Ξ. Wird eine der Mengen m und n unbestimmt gelassen, so Ξ eine Funktion von ihr (nach Definition 6 c) von § 1); ebenso ist, ls m und n zwei Funktionen der Unbestimmten x sind, auch Ξ eine nktion von x.

m und n sind äquivalent oder nicht, je nachdem $\Xi \neq 0$ oder $\Xi = 0$.

14. *Ist Φ eine Abbildung zwischen den äquivalenten elementefremden engen m und n, so gibt es eine Funktion $\chi(x)$ derart, daß $\nu = \chi(\mu)$ das nem beliebigen Element μ von m vermöge Φ entsprechende Element von n ist.*

Nach Definition 1 sind die Elemente von Φ lauter Paare, und in nem einzigen $\{\mu, \nu\} = y$ unter ihnen tritt das beliebig gegebene $\mu \varepsilon m$ f, während sein Bild ν das andere Element des Paares ist. Es ist so $\{\{\mu, \nu\}\} = \Phi_{\mu \varepsilon y}$, somit $\{\nu\} = \mathfrak{S} \Phi_{\mu \varepsilon y} - \{\mu\}$ (Nr. 2 und 3) und $= \mathfrak{S}(\mathfrak{S} \Phi_{\mu \varepsilon y} - \{\mu\}) = \chi(\mu)$. Aus Symmetriegründen ist für diese Funk- n auch umgekehrt $\mu = \chi(\nu)$.

15. Sind die Mengen m, n, r paarweise elementefremd, so folgt aus $\sim r$, $r \sim n$ stets $m \sim n$. Oder etwas allgemeiner: Ist $m \sim r$, $r \sim r'$, $\sim n$ und $[m, r] = [r, r'] = [r', n] = [m, n] = 0$, so ist $m \sim n$.

Es seien $\Phi \preccurlyeq m \cdot r$, $\mathsf{X} \preccurlyeq r \cdot r'$, $\Psi \preccurlyeq r' \cdot n$ je eine Abbildung zwischen n als äquivalent vorausgesetzten Mengen. Ist μ ein beliebiges Element n m, und ν ein beliebiges Element von n, so sei gemäß Nr. 14 $\varrho = \chi_1(\mu)$ s vermöge Φ dem $\mu \varepsilon m$ entsprechende Bild in r, $\varrho' = \chi_2(\nu)$ das ver- öge Ψ dem $\nu \varepsilon n$ entsprechende Bild in r'. Schreibt man μ und ν in der rm $\mu = \mathfrak{S}[\{\mu, \nu\}, m]$, $\nu = \mathfrak{S}[\{\mu, \nu\}, n]$, so kann nach Definition 6 a) n § 1 etwa $\{\varrho, \varrho'\} = \chi_3(\{\mu, \nu\})$ gesetzt werden, was außer von den ge- benen Mengen m, r, r', n, Φ, Ψ nur noch von dem Paar $\{\mu, \nu\}$ ab- ngt. Es sei nun $\Omega = (m \cdot n)_{\chi_3(y) \varepsilon \mathsf{X}}$ die Menge der Elemente $y = \{\mu, \nu\}$ n $m \cdot n$, deren zugehöriges Bilderpaar $\chi_3(y) = \{\varrho, \varrho'\}$ in X vorkommt. nn ist $\Omega \preccurlyeq m \cdot n$ eine Abbildung zwischen m und n; denn wegen des bildungscharakters der Mengen Φ, X, Ψ gehört zu jedem Element σ n m (oder n) ein einziges Bilderpaar $\{\varrho, \varrho'\}$, das in X vorkommt und m umgekehrt ein einziges Element von $M \cdot N$ entspricht, in welchem ßer σ noch ein bestimmtes Element von n (oder m) enthalten ist.

16. *Sind m und n Mengen, so gibt es (mindestens) eine Menge M, e zu m und n elementefremd und zu m äquivalent ist.*

Wie in Z., Nr. 19, kann man, wenn r eine Menge bedeutet, die nicht Element von $m + \mathfrak{S}(m + n)$ ist (Nr. 5), für M das (nach Nr. 8 wegen $[m, \{r\}] = 0$ existierende) Produkt $m \cdot \{r\}$ wählen, das sich wie dort als zu m und n elementefremd erweist.

Zum Beweis der Äquivalenz von m und M bedenke man, daß wegen $r \varepsilon m$ jedes Element $\{\mu, r\}$ von M nur ein einziges Element μ von m als Element enthält, dem umgekehrt $\{\mu, r\}$ eindeutig entspricht. Ein beliebiges Element y von $m \cdot M$ hat die Form $\{\mu, \{\mu', r\}\}$, wo μ und μ' Elemente von m bedeuten, und hierfür ist $\mu = \mathfrak{S}[y, m]$, $\{\mu', r\} = \mathfrak{S}[y, M]$; die Menge der $y \varepsilon (m \cdot M)$, für die $\mu = \mu'$ ist, d. h. die Menge $(m \cdot M)_{\mathfrak{S}[y, m] \varepsilon \mathfrak{S}[y, M]}$ stellt also eine Abbildung zwischen m und M dar. — Kürzer läßt sich der Beweis unter Heranziehung von Nr. 12 führen.

Bestimmt man r gemäß dem letzten Absatz von Nr. 5 so, daß r nur von m und n abhängt, so hängt bei der vorstehenden Festsetzung über M auch diese Menge nur von m und n ab und ist, wenn eine dieser beiden Mengen als konstant betrachtet wird, eine Funktion der anderen.

Es folgt wie in Z., daß es keine Menge geben kann, die alle einer gegebenen Menge ($\neq 0$) äquivalenten Mengen als Elemente enthielte.

Definition 2. Zwei beliebige (nicht notwendig elementefremde) Mengen m und n heißen *äquivalent* ($m \sim n$), wenn es eine („vermittelnde") Menge r gibt, die sowohl zu m wie zu n elementefremd und beiden Mengen (gemäß Definition 1) äquivalent ist.

17. Für elementefremde Mengen m und n steht diese Definition nach den Nrn. 15 und 16 im Einklang mit der früheren, die durch sie zu einer Definition der Äquivalenz für zwei beliebige Mengen ergänzt wird. Die Äquivalenz ist eine *symmetrische* Beziehung. Zwei Elemente $\mu \varepsilon m$ und $\nu \varepsilon n$ heißen einander vermöge der *simultanen* Abbildungen $\Phi \in m \cdot r$ und $\Psi \in r \cdot n$ *zugeordnet* usw., wenn es ein Element ϱ von r gibt, dem sowohl μ vermöge Φ wie auch ν vermöge Ψ entspricht.

Ist M gemäß Nr. 16 eine zu zwei beliebigen Mengen m und n elementefremde und zu einer von ihnen, etwa m, äquivalente Menge und stellt Ξ gemäß Nr. 13 die Menge aller Abbildungen zwischen den elementefremden Mengen M und n dar, so ist hiernach $m \sim n$, sobald $\Xi \neq 0$ ist. Aber auch *nur* dann, da nach Nr. 15 aus $M \sim m$ und $m \sim n$ — d. h. nach Definition 2: aus $M \sim m$, $m \sim r$, $r \sim n$, $[m, r] = [r, n] = 0$ — stets $M \sim n$ (d. h. $\Xi \neq 0$) folgt.

Wie in Z., Nr. 22 und 23, erkennt man *den reflexiven* ($m \sim m$) *und transitiven* (vgl. Nr. 15) *Charakter der Äquivalenz* und die Tatsachen, daß 0 nur sich selbst, eine Menge mit einem einzigen Element nur einer ebensolchen äquivalent ist.

18. *Sind m und n äquivalente Mengen, so gibt es, wenn die vermittelnde Menge r und das Paar simultaner Abbildungen $\{\Phi, \Psi\}$ gemäß Nr. 17 gegeben sind, hierzu eine Funktion $\chi(x)$, die jedem Element μ von m sein Bild in n in der Form $\nu = \chi(\mu)$ zuordnet.*

Um $\chi(x)$ zu finden, hat man nur die Funktionsbildung der Nr. 14 beliebig oft hintereinander anzuwenden.

19. *Ist r eine vermittelnde Menge und $\{\Phi, \Psi\}$ ein Paar simultaner Abbildungen zu den äquivalenten Mengen m und n, so gibt es eine Funktion $\tau(x)$, die jeder Teilmenge m_0 von m eine bestimmte Teilmenge $n_0 = \tau(m_0)$ von n zuordnet, so daß n_0 die Bilder der Elemente der Teilmenge m_0 in m und nur sie als Elemente enthält.*

Es sei $\Phi_0 = \tau_1(m_0)$ die Menge derjenigen in der Abbildung $\Phi \in m \cdot r$ auftretenden Paare $y = \{\mu, \varrho\}$, die überhaupt Elemente μ der Teilmenge $m_0 \in m$ enthalten (m. a. W. deren zu m gehöriges Element μ auch zu m_0 gehört), also $\Phi_0 = \Phi_{[y, m_0] \neq 0}$ (oder auch $= \Phi_{\in [y, m] \varepsilon m_0}$); daher ist $[\Phi_0, r] = \tau_2(m_0)$ die Teilmenge r_0 von r, die die Bilder der Elemente von m_0 in r umfaßt. Durch Wiederholung des Verfahrens unter Ersetzung von Φ, m, r usw. durch Ψ, r, n usw. erhält man die gewünschte Funktion $\tau(m_0)$.

Hiermit läßt sich wie in Z., Nr. 24, beweisen, daß aus $m \sim m'$, $n \sim n'$, $[m, n] = [m', n'] = 0$ stets folgt $m + n \sim m' + n'$. Vgl. nachstehend Nr. 22.

20. Ist m einer Teilmenge $m' \in m$ äquivalent, so ist m auch jeder Teilmenge m_1 „zwischen m' und m“ äquivalent, d. h. jeder Menge $m_1 \in m$, für die $m' \in m_1$. Hieraus folgt in bekannter Weise (unter Verwendung von Nr. 19) der *Äquivalenzsatz*: Ist $m \sim n_0 \in n$ und $n \sim m_0 \in m$, so ist $m \sim n$.

Zum Beweis setze man (bei gegebenen m, m', m_1) $m_1 - m' = q$; es kann $q \neq 0$ angenommen werden, da sonst der Satz trivial ist. Die Äquivalenz $m \sim m'$ werde durch die zu beiden Mengen elementefremde Menge r und das Abbildungspaar $\{\Phi, \Psi\}$ vermittelt. Ist schließlich gemäß Nr. 19 $\tau(x)$ eine Funktion, die bei den gewählten Abbildungen jeder Teilmenge von m die entsprechende Teilmenge $\tau(y)$ von m' zuordnet, so bilde man $(\mathfrak{U} m)_{q \varepsilon \mathfrak{U} y} = M$ und $M_{\tau(y) \varepsilon \mathfrak{U} y} = T$; $T \in \mathfrak{U} m$ ist hiernach die Menge derjenigen Teilmengen y von m, die sowohl die feste Menge q wie die jeden selbst in m' entsprechende Teilmenge $\tau(y) \in m'$ zu Teilmengen besitzen. m selbst ist eine solche Teilmenge y, also $m \varepsilon T$. Hieraus folgt wie in Z., Nr. 25, daß der Durchschnitt $a = \mathfrak{D} T$ aller Elemente von T einerseits ein Element von T ist und daß für die ihm entsprechende Teilmenge $\tau(a) = a' \in m'$ gilt: $m_1 \sim a' + (m' - a') = m' \sim m$, w. z. b. w.

21. Zu einer gegebenen Menge $m = \{a, b, c, \ldots\}$ läßt sich eine äquivalente Menge $m' = \{a', b', c', \ldots\}$ derart angeben, daß erstens die (bei einer fest angenommenen Abbildung $\Omega \leqq m \cdot m'$) einander entsprechenden Elemente a und a', b und b' usw. einander beziehentlich äquivalent und daß zweitens die Elemente von m' untereinander und zu einer gegebenen Menge n (paarweise) elementefremd sind.

Beweis. Gemäß Nr. 16 bilde man, wenn $\mathfrak{S} m = s$ gesetzt wird, eine Menge m'', die äquivalent m und elementefremd zu der Summe $m + s + \mathfrak{S}(s + n)$ ist. Da hiernach namentlich auch m und m'' elementefremd sind, so gibt es eine Abbildung Ω zwischen m und m'', die jedem Element $a, b, \ldots$ von m ein Element $a'', b'', \ldots$ von m'' umkehrbar eindeutig zuordnet. Das Produkt $s \cdot m''$, das nach Nr. 8 wegen $[s, m''] = 0$ existiert, enthält dann lauter Elemente der Form $y = \{\sigma, \mu''\}$, wo $\sigma \varepsilon s$ und $\mu'' \varepsilon m''$; es ist $\sigma = \mathfrak{S}[y, s]$ und $\mu'' = \mathfrak{S}[y, m'']$. Schließlich sei $\chi(x)$ gemäß Nr. 14 die zu der Abbildung $\Omega \leqq m \cdot m''$ gehörige Funktion, die jedem Element $\mu'' \varepsilon m''$ das entsprechende $\chi(\mu'') = \mu \varepsilon m$ zuordnet. Dann enthält die Teilmenge $s' \leqq s \cdot m''$, die durch $s' = (s \cdot m'')_{\mathfrak{S}[y, s] \varepsilon \chi(\mathfrak{S}[y, m''])}$ definiert ist, all die Elemente $y = \{\sigma, \mu''\}$ von $s \cdot m''$ und nur sie, für die σ Element der zu μ'' vermöge Ω zugeordneten Menge $\mu \varepsilon m$ ist. s' erweist sich wie in Z., Nr. 28, als elementefremd zu $s + n$. Ist weiter a ein beliebiges Element von m und $a'' = \chi(a)$ das ihm vermöge Ω entsprechende Element von m'', so bilde man die Teilmenge a' von s', die die Elemente $y = \{\sigma, \mu''\} \varepsilon s'$ mit der Eigenschaft $\mu'' = a''$ (d. h. $a'' \varepsilon y$) umfaßt, d. h. die Menge $a' = s'_{\chi(a) \varepsilon y}$; betrachtet man das Element a von m als veränderlich (in m), so ist also $a' = \lambda(a)$ eine Funktion von a. Führt man die nämliche Konstruktion für alle Elemente $a, b, c, \ldots$ von m durch, so erhält man lauter Teilmengen $a', b', c', \ldots$ von s', und es ist für die nämliche Funktion $\lambda(x)$ auch $b' = \lambda(b)$, $c' = \lambda(c)$ usw.; wie a. a. O. erkennt man, daß erstens all diese Mengen $a', b', c', \ldots$ sowie die Menge n paarweise elementefremd sind und daß zweitens die Äquivalenzen $a' \sim a$, $b' \sim b$, $c' \sim c$ usw. gelten. Um schließlich die gefundenen Teilmengen $a', b', c', \ldots$ von s' alle zu einer Menge m' zu vereinigen, bedenke man, daß erstens die Mengen $a, b, c, \ldots$ und nur sie der gegebenen Menge m als Elemente angehören, daß zweitens eine und dieselbe Funktion $\tau(x)$ jeder Menge $\mu \varepsilon m$ die äquivalente Menge $\lambda(\mu) = \mu' \leqq s'$ zuordnet und daß drittens die Mengen $a', b', c', \ldots$ sämtlich (als Teilmengen von s') Elemente von $\mathfrak{U} s'$ sind. Die Existenz der Menge m' folgt daher aus dem Satz von Nr. 12, und damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Wie in Z., Nr. 29, folgt hieraus auf Grund von VI unmittelbar das *allgemeine Auswahlprinzip*: Ist m eine Menge, deren Elemente sämtlich

n 0 verschieden sind, so gibt es Mengen, die jedem Element μ von m ndeutig ein Element von μ zuordnen.

22. *Hauptsatz der Addition und Multiplikation: Sind zwei äqui-lente Mengen m und n, deren Elemente jeweils untereinander paarweise ementefremd sind, so aufeinander abgebildet, daß jedem Element von m n äquivalentes Element von n entspricht, so gelten auch für die zu-hörigen Summen und Produkte die Äquivalenzen $\mathfrak{S}m \sim \mathfrak{S}n$ und $m \sim \mathfrak{P}n$.*

Zum Beweis[11]) werde zunächst vorausgesetzt, daß $\mathfrak{S}m = s$ und $n = t$ elementefremd seien, so daß auch jedes Element von m jedem ement von n elementefremd ist. Ist $\Omega \leqq m \cdot n$ die zugrunde gelegte bildung zwischen den (um so mehr elementefremden) Mengen m und n, gibt es nach Nr. 14 eine Funktion $\chi(x)$, die jedem Element μ von m — nach Voraussetzung äquivalentes — Element $\nu = \chi(\mu)$ von n zu-dnet, und nach Nr. 13 ist die Menge aller Abbildungen zwischen den uivalenten elementefremden Mengen μ und ν eine von 0 verschiedene ilmenge von $\mathfrak{U}(\mu \cdot \nu)$ und in der Form $\tau(\mu)$ darstellbar, wo $\tau(x)$ eine te (nur von Ω abhängige) Funktion bedeutet. Während μ alle Ele-nte von m durchläuft, ist $\tau(\mu)$ stets eine Teilmenge von $\mathfrak{U}(s \cdot t)$. ch Nr. 12 existiert daher eine Menge $\Xi \leqq \mathfrak{U}\mathfrak{U}(s \cdot t)$, die all jene (von 0 rschiedenen) Mengen $\tau(\mu)$ von Abbildungen zwischen je zwei ent-rechenden Elementen $\mu \varepsilon m$ and $\nu \varepsilon n$ und nur sie umfaßt; die Elemente n Ξ sind paarweise elementefremd, weil nach Voraussetzung je zwei ements μ und μ' von m, ebenso die entsprechenden ν und ν' von n mentefremd sind und hieraus wegen der Elementefremdheit von s und t ch diejenige von $\mathfrak{U}(\mu \cdot \nu)$ und $\mathfrak{U}(\mu' \cdot \nu')$, somit von $\tau(\mu)$ und $\tau(\mu')$ lgt. Daher ist nach dem Auswahlaxiom VI sicher $\mathfrak{P}\Xi \neq 0$; ist θ ein liebiges Element von $\mathfrak{P}\Xi$, das also aus jeder der Mengen $\tau(\mu)$ je eine nzige Abbildung enthält, so liefert $\mathfrak{S}\theta$ offenbar eine Abbildung zwischen n Mengen $s = \mathfrak{S}m$ und $t = \mathfrak{S}n$ (vgl. auch Z., Nr. 30). Damit ist nter der Bedingung $[s, t] = 0$) der gewünschte Beweis für die Addition führt; seine Ausdehnung auf die Multiplikation vollzieht sich auf Grund r gewählten Menge $\mathfrak{S}\theta$ in derselben Weise wie in Z. (S. 275, Mitte).

Wird schließlich die Voraussetzung der Elementefremdheit von s und t fgegeben, so braucht man nur gemäß Nr. 16 eine Hilfsmenge einzu-hren, die zu s äquivalent und zu $s + t$ elementefremd ist; dann hat

---

[11]) In dem entsprechenden Beweis von Z. (Nr. 30) dürfte der definite Charakter s Aussonderungsprozesses besonders unsicher erscheinen. In noch höherem Maß t dies für den Anfang des Beweises in Nr. 33 von Z.; vgl. nachstehend Nr. 26, Absatz.

man genau entsprechend dem letzten Absatz von Z., Nr. 30, zu schließen um den Beweis zu beenden.

Definition 3. Ist m einer Teilmenge von n äquivalent, während n keiner Teilmenge von m äquivalent ist, so heißt m *von kleinerer Mächtigkeit als* n $(m < n)$.

23. Dann und nur dann ist m mindestens einer Teilmenge von n, d. h. einem Element von $\mathfrak{U}n$, äquivalent, wenn für irgendein Element n_0 von $\mathfrak{U}n$ (vgl. Nr. 11) die Menge der Abbildungen zwischen m und n_0 (Nr. 13 bzw. Nr. 17) von 0 verschieden ist. Andererseits ist dann und nur dann n keiner Teilmenge von m äquivalent, wenn für jedes Element m_0 von $\mathfrak{U}m$ (vgl. Nr. 10) sich die Menge der Abbildungen zwischen n und m_0 auf die Nullmenge reduziert.

24. Nach den Definitionen 1 bis 3 dieses Paragraphen schließen die drei Beziehungen $m \sim n$, $m < n$, $n < m$ einander aus. Ebenso folgt falls außer $m < n$ noch $n < r$ oder $n \sim r$ ist, stets $m < r$. Nach dem Äquivalenzsatz (Nr. 20) gilt, falls m einer Teilmenge von n äquivalent ist, entweder $m < n$ oder $m \sim n$.

Nach Nr. 1 bzw. 2 ist die Nullmenge von kleinerer Mächtigkeit als jede andere Menge und, wie man leicht sieht, jede Menge mit einem einzigen Element von kleinerer Mächtigkeit als jede andersartige von 0 verschiedene Menge.

25. *Satz von Cantor. Jede Menge m ist von kleinerer Mächtigkeit als ihre Potenzmenge* $\mathfrak{U}m = M$.

Zunächst existiert nach Nr. 7 eine Teilmenge $M_0 \leqq M$, die all die Teilmengen y von m als Elemente umfaßt, in denen nur ein einziges Element vorkommt; es ist $M_0 = M_{y=\{\varepsilon y\}}$. Durch Zuordnung jedes beliebigen Elements $\mu \varepsilon m$ zu der Menge $\{\mu\} \varepsilon M_0$ und umgekehrt erkennt man, daß $m \sim M_0 \leqq M$.

Wäre umgekehrt M einer Teilmenge $\overline{m}$ von m äquivalent, so daß es mindestens eine Abbildung Φ (bzw. ein Paar simultaner Abbildungen $\{\Phi, \Psi\}$) zwischen M und $\overline{m}$ gäbe, so sei gemäß Nr. 18 $\chi(x)$ eine Funktion, die vermöge jener Abbildung jedem Element y von $\overline{m}$ eine gewisse Teilmenge $\chi(y) = m'$ von m, d. h. ein Element m' von M, zuordnet und umgekehrt. Wir bilden die Teilmenge $m^* = \overline{m}_{y \notin \chi(y)}$, die all die Elemente y von $\overline{m} \leqq m$ und nur sie enthält, welche in der jeweils entsprechenden Teilmenge $\chi(y)$ von m *nicht als Element vorkommen*. Diese nach dem Diagonalverfahren gebildeten Menge $m^* \leqq \overline{m} \leqq m$ müßte, wie jede Teilmenge von m, vermöge der gewählten Abbildung ein Element μ^* von $\overline{m}$ entsprechen, was sich in bekannter Weise als unmöglich erweist (da $\mu^* \varepsilon m^*$ der Definition von m^* widerspricht, andererseits $\mu^* \varepsilon m^*$ eben

wegen dieser Definition die Beziehung $\mu^* \varepsilon m^*$ nach sich ziehen müßte). M ist also *keiner* Teilmenge von m äquivalent, d. h. nach dem vorigen Absatz und Definition 3: $m < M$[12]).

26. *Ungleichung von Zermelo.* Sind zwei äquivalente Mengen m und n, deren Elemente jeweils untereinander paarweise elementefremd sind, so aufeinander abgebildet, daß jedes Element μ von m von kleinerer Mächtigkeit ist als das entsprechende Element ν von n, so ist die Summe $\mathfrak{S}m$ der Elemente von m von kleinerer Mächtigkeit als das Produkt $\mathfrak{P}n$ der Elemente von n.

Beweis, erster Teil. Der Beweis werde unter der Annahme geführt, daß die Summen $\mathfrak{S}m$ und $\mathfrak{S}n$ elementefremd sind (vgl. den Beweis von Nr. 22); die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall vollzieht sich dann ganz entsprehend wie dort. Im ersten Teil des Beweises ist zu zeigen, daß $\mathfrak{S}m$ einer Teilmenge N_1 von $\mathfrak{P}n$ äquivalent ist. Zu der ein für allemal zugrunde gelegten Abbildung Φ zwischen m und n existiert nach Nr. 14 eine Funktion $\chi(x)$, die einem beliebigen Element $\mu \varepsilon m$ das entsprechende $\nu \varepsilon n$ in der Form $\nu = \chi(\mu)$ zuordnet; da nach Voraussetzung $\mu < \nu$, so existiert mindestens eine zu μ äquivalente Teilmenge ν_1 von ν, für die also (Nr. 13) die Menge $\Xi \neq \mathfrak{U}(\mu \cdot \nu_1) \neq \mathfrak{U}(\mu \cdot \nu)$ der Abbildungen zwischen μ und ν_1 von 0 verschieden ist. Die Menge N *aller* zu μ äquivalenten Teilmengen $y = \nu_1$ von ν ist eine Teilmenge von $\mathfrak{U}\nu$, die all die $y \varepsilon \mathfrak{U}\nu$ umfaßt, für die $\Xi \neq 0$; da Ξ nach Nr. 13 bei festem μ eine Funktion $\tau(y)$ von $y = \nu_1$ ist, so ist $\mathsf{N} = (\mathfrak{U}\nu)_{\tau(y) \neq 0} = (\mathfrak{U}\chi(\mu))_{\tau(y) \neq 0}$. Bei festgehaltener Abbildung Φ hängen sowohl $\mathfrak{U}\chi(\mu)$ wie $\tau(y)$ nur von μ (abgesehen von der Hilfsvariablen y) ab; N ist daher bei unbestimmtem μ eine Funktion $\varrho(\mu)$ von μ (§ 1, Definition 6 c)). Andererseits ist nach Nr. 13 die Menge aller Abbildungen zwischen der festen Menge $\mu \varepsilon m$ und einem vorläufig unbestimmten Element x von $\mathsf{N} = \varrho(\mu)$ eine Funktion $\sigma(x)$ von x; es ist stets $\sigma(x) \neq 0$ und $\sigma(x) \neq \mathfrak{U}(\mu \cdot \nu)$, da jedes Element $x \varepsilon \mathsf{N}$ nach der Definition von N zu μ äquivalent und eine Teilmenge von ν ist. Führt man nun eine Menge A_μ ein als die Menge aller Abbildungen zwischen μ einerseits und allen zu μ äquivalenten Teilmengen

---

[12]) Wegen der grundsätzlichen Bedeutung sei auch noch die *direkte* Fassung dieses Beweises angegeben. $M_1 \neq M$ sei eine beliebige, aber von nun an feste, zu $\overline{m} \neq m$ äquivalente Teilmenge von M und vermöge einer bestimmten Abbildung Φ zwischen M_1 und $\overline{m}$ werde jedem Element y von $\overline{m}$ ein Element $\chi(y) = m'$ von M_1 zugeordnet. Dann kann die nach dem Diagonalverfahren gebildete Menge $m^* = \overline{m}_{y \notin \chi(y)} \neq m$ nicht Element von M_1 sein, weil sie (vgl. oben) keinem Element von $\overline{m}$ vermöge der Abbildung Φ entsprechen kann. Die zu $\overline{m}$ äquivalente Teilmenge $M_1 \neq M$ kann also, da sie $m^* \neq m$ nicht enthält, nicht mit der Menge M *aller* Teilmengen von m identisch sein, d. h. es ist $m < M$.

von ν (d. h. allen Elementen von N) andererseits, so läßt sich A_μ auch bezeichnen als die Menge derjenigen $y \varepsilon \mathfrak{U}(\mu \cdot \nu)$, die für irgendein Element $x \varepsilon \mathsf{N}$ der mit $\sigma(x)$ bezeichneten Menge von Abbildungen als Elemente angehören; $\mathsf{A}_\mu \preccurlyeq \mathfrak{U}(\mu \cdot \nu)$ existiert also nach Nr. 11 (in der $\mathfrak{U}(\mu \cdot \nu)$ für m N für n, y für $\varphi(x, y)$, $\sigma(x)$ für $\psi(x, y)$ einzusetzen ist) und stellt bei unbestimmtem μ eine Funktion von μ dar, da das nämliche von $\nu = \chi(\mu)$ und somit von $\mathfrak{U}(\mu \cdot \nu)$ sowie von $\mathsf{N} = \varrho(\mu)$ gilt und da $\sigma(x)$ nach Nr. 1[illegible] bei festgehaltenem x gleichfalls eine Funktion von μ ist[13]). Es ist für jedes $\mu \varepsilon m$ erstens $\mathsf{A}_\mu \neq 0$, da schon $\sigma(x) \neq 0$ bei festem x, und zweitens $\mathsf{A}_\mu \preccurlyeq \mathfrak{U}(\mathfrak{S}m \cdot \mathfrak{S}n)$, da stets $\mu \preccurlyeq \mathfrak{S}m$ und $\nu \preccurlyeq \mathfrak{S}n$. Läßt man weiter μ die Elemente von m durchlaufen, so entsteht nach Nr. 12 genau wie oben, Nr. 22, eine Menge $\mathsf{T} \preccurlyeq \mathfrak{U}\mathfrak{U}(\mathfrak{S}m \cdot \mathfrak{S}n)$, die sämtliche Mengen A_μ aller Abbildungen zwischen jedem $\mu \varepsilon m$ und den äquivalenten Teilmengen der jeweils entsprechenden $\nu \varepsilon n$ als Elemente umfaßt; die Elemente A_μ von T sind untereinander paarweise elementefremd. Genau wie in Nr. 22 liefert schließlich ein beliebiges, von nun an festgehaltenes Element θ des (nach VI nicht verschwindenden) Produktes $\mathfrak{P}\mathsf{T}$ eine simultane Abbildung aller Mengen $\mu \varepsilon m$ auf je eine einzige äquivalente Teilmenge ν_1 des entsprechenden Elements ν von n. Durch $\Omega = \mathfrak{S}\theta \preccurlyeq \mathfrak{S}m \cdot \mathfrak{S}n$ wird also jedes Element von $\mathfrak{S}m$ einem bestimmten Element von $\mathfrak{S}n$ zugeordnet, wenn auch nicht umgekehrt.

Wir legen weiter die feste Menge $\Omega = \mathfrak{S}\theta$ zugrunde, die zu jedem Element von $\mathfrak{S}m$ — also zu jedem Element α eines jeden $\mu \varepsilon m$ — ein Elemente*paar* enthält, nämlich das Paar aus α und einem einzigen Element einer bestimmten zu μ äquivalenten Teilmenge ν_1 des μ entsprechenden $\nu \varepsilon n$. Nach Nr. 3 und der Definition 6 von § 1 ist dann $\nu - \nu_1 = \varphi(\mu)$ eine Funktion von μ, da $\nu = \chi(\mu)$ und $\nu_1 = \nu_{y \varepsilon \mathfrak{S}\Omega}$ (d. h. die Menge der $y \varepsilon \nu$, die in irgendeinem der Paare von Ω vorkommen) Funktionen von μ sind. Ferner ist stets $\nu - \nu_1 \preccurlyeq \nu \preccurlyeq \mathfrak{S}n$, d. h. die Mengen $\nu - \nu_1$ sind sämtlich Elemente von $\mathfrak{U}\mathfrak{S}n$. Daher gelangt man, wenn man μ die Elemente von m durchlaufen läßt, nach Nr. 12 zu einer Menge $n_1 \preccurlyeq \mathfrak{U}\mathfrak{S}n$, die zu jedem $\nu \varepsilon n$ die bezeichnete Menge $\nu - \nu_1$ als Element enthält. Da wegen $\mu < \nu$ offenbar stets $\nu - \nu_1 \neq 0$, so ist nach VI auch $\mathfrak{P}n_1 \neq 0$, und es existiert also mindestens eine Menge $q \varepsilon \mathfrak{P}n_1$, die mit jeder der Mengen $\nu - \nu_1$ ein einziges Element gemein hat und keine weiteren Elemente enthält; es ist $q \preccurlyeq \mathfrak{S}n$ und wegen der bezeichneten Art von q nach Nr. 8 $q \varepsilon \mathfrak{P}n$.

---

[13]) Auf einem Umweg, der indes einige Schlüsse erspart, gelangt man auch unter Benutzung von Nr. 12 (statt 11) zu dieser Menge A_μ, die in Z., Nr. 33, ohne volle Rechtfertigung auftritt.

Zu der Abbildung Ω zwischen $\mathfrak{S}m$ und einer gewissen Teilmenge von $\mathfrak{S}n$ gehört nach Nr. 14 eine Funktion $\psi_1(x)$, die jedem Element $s \varepsilon \mathfrak{S}m$ ein (einem $\nu_1 \leqq \nu \varepsilon n$ angehöriges) Element $\psi_1(s) = s' \varepsilon \mathfrak{S}n$ eindeutig zuordnet (aber nicht umgekehrt); die s' enthaltende Menge $\nu \varepsilon n$ läßt sich als Funktion von s' (und somit von s) darstellen in der Form $\nu = \mathfrak{S} n_{s' \varepsilon y} = \psi_2(s)$. Ferner wird durch s' das Element $y = s'_0$ von $q \leqq \mathfrak{S}n$, das dem nämlichen Element ν von n angehört wie s', bestimmt in der Form $s'_0 = \mathfrak{S} q_{y \varepsilon \psi_2(s)} = \psi_3(s)$; da aus $s' \varepsilon \nu_1$ stets $s'_0 \varepsilon (\nu - \nu_1)$ folgt, so ist $s' \neq s'_0$. Ersetzt man schließlich in q das Element $s'_0 \varepsilon q$ durch s', so ist auch die neue Menge $q_s = q - \{s'_0\} + \{s'\}$ eine Funktion von s und ein Element von $\mathfrak{P}n$, da $q_s \leqq \mathfrak{S}n$ mit jedem $\nu \varepsilon n$ ein einziges Element gemein hat. Durchläuft s die Elemente von $\mathfrak{S}m$, so bilden die zugehörigen $q_s \varepsilon \mathfrak{P}n$, die sich wie in Z., S. 278 oben, als untereinander sämtlich verschieden erweisen, nach Nr. 12 die Elemente einer Menge $N_1 \leqq \mathfrak{P}n$; aus demselben Grund bilden die Paare $\{s, q_s\}$ die Elemente einer Menge $X \leqq \mathfrak{S}m \cdot N_1$. X ist aber eine Abbildung zwischen $\mathfrak{S}m$ und $N_1 \leqq \mathfrak{P}n$, womit der erste Teil des Beweises abgeschlossen ist.

Zweiter Teil. Es ist zu zeigen, daß $\mathfrak{P}n$ keiner Teilmenge M_0 von $\mathfrak{S}m$ äquivalent sein kann; der Beweis werde im Anschluß an Z. indirekt geführt, ist aber ebenso wie in der Fußnote zu Nr. 25 leicht direkt zu wenden. Wäre $\mathfrak{P}n \sim M_0 \leqq \mathfrak{S}m$, so sei $\Psi \leqq M_0 \cdot \mathfrak{P}n \leqq \mathfrak{S}m \cdot \mathfrak{P}n$ eine Abbildung zwischen M_0 und $\mathfrak{P}n$, die jedem $\sigma \varepsilon M_0$ ein $\pi(\sigma) \varepsilon \mathfrak{P}n$ umkehrbar eindeutig zuordnet. Ist speziell σ ein Element des Durchschnitts μ_0 von M_0 mit einem bestimmten Element μ von m, also $\sigma \varepsilon [M_0, \mu] = \mu_0$, so enthält das σ entsprechende $\pi(\sigma) \varepsilon \mathfrak{P}n$ ein einziges Element σ' der zu $\mu \varepsilon m$ vermöge Φ zugeordneten Menge $\chi(\mu) = \nu \varepsilon n$ (vgl. Beginn des ersten Teiles), nämlich das Element, das $\pi(\sigma)$ mit ν gemein hat; es ist $\sigma' = \mathfrak{S}[\pi(\sigma), \chi(\mu)]$. Ist also $\mu \varepsilon m$ gegeben und durchläuft σ die Elemente von μ_0, so bilden die zugehörigen Elemente σ' von ν, die übrigens nicht alle untereinander verschieden zu sein brauchen, nach Nr. 12 die Elemente einer Teilmenge ν_2 von ν, welche bei variablem $\mu \varepsilon m$ eine Funktion von μ ist. Es ist $\nu_2 \neq \nu$, weil sonst ν gemäß einer naheliegenden (analog dem Anfang des ersten Teiles mit Nr. 13 und VI operierenden) Überlegung einer Teilmenge von $\mu_0 \leqq \mu$ äquivalent wäre entgegen der Voraussetzung $\mu < \nu$. Schließlich ist die Komplementärmenge $\nu - \nu_2$ eine von 0 verschiedene Teilmenge von $\mathfrak{S}n$ und ebenso wie ν und ν_2 eine Funktion von μ. Durchläuft daher μ die Elemente von m, so bilden nach Nr. 12 die zugehörigen, paarweise elementefremden Mengen $\nu - \nu_2$ die Elemente einer Menge $n_2 \leqq \mathfrak{U}\mathfrak{S}n$, und nach VI ist $\mathfrak{P}n_2 \neq 0$.

Wie man nun gemäß dem Ende der Nr. 33 von Z. erkennt, kann ein beliebiges Element der (nach dem Diagonalverfahren gebildeten) Menge

$\mathfrak{P}n_2$, das somit gleichzeitig Element von $\mathfrak{P}n$ ist, vermöge der Abbildung Ψ keinem Element von $M_0 \preccurlyeq \mathfrak{S}m$ entsprechen; die Annahme $\mathfrak{P}n \sim M_0$ ist also widerlegt und der Satz somit vollständig bewiesen.

Die spezielleren Sätze von Cantor (Nr. 25) und Julius König folgen hieraus mittels Verwendung von Nr. 12 so einfach, daß der Verweis auf die Nrn. 34 und 35 von Z. genügen wird.

§ 4.

Die abzählbar unendlichen Mengen.

Wie zu Ende des § 1 bemerkt, verbürgen unsere Axiome I bis VI und daher auch die in den §§ 2 und 3 gezogenen Folgerungen noch nicht die Existenz von Mengen überhaupt. Fordert man dagegen die Existenz mindestens einer Menge, so folgt nach § 2 die Existenz der Nullmenge und beliebig vieler weiterer verschiedener Mengen, z. B. der Mengen

$$0,\ \{0\},\ \{\{0\}\},\ \ldots,\ \{0,\{0\}\},\ \{0,\{0\},\{\{0\}\}\},\ \ldots.$$

Wir definieren nun nach Dedekind:

Definition 1. Eine Menge m, die einer echten Teilmenge $m_0 \prec m$ äquivalent ist, heißt eine *unendliche* Menge. Eine Menge, die nicht unendlich ist, heißt *endlich*.

Nach Nr. 17 ist die Nullmenge sowie jede Menge der Form $\{m\}$ und jede Paarmenge endlich.

27. Eine unendliche Menge m ist keiner endlichen Menge n äquivalent.

Ist nämlich m unendlich, also einer echten Teilmenge m_0 äquivalent, und ist n eine beliebige zu m äquivalente Menge, so existiert vermöge einer Abbildung bzw. einem Paar von Abbildungen zwischen m und n nach Nr. 19 eine Funktion $\tau(x)$, die jeder Teilmenge von m eine äquivalente Teilmenge von n zuordnet. Ist $\tau(m_0) = n_0 \prec n$, so folgt aus $n \sim m$, $m \sim m_0$, $m_0 \sim n_0$ nach Nr. 17 $n \sim n_0 \prec n$. Ist ferner (gemäß der Voraussetzung $m_0 \neq m$) μ ein Element von $m - m_0$, so ist das entsprechende Element ν von n nach den Nrn. 18 und 19 nicht Element von $\tau(m_0) = n_0$; es ist also $n_0 \neq n$. Da somit n der echten Teilmenge $n_0 \prec n$ äquivalent ist, ist auch n eine unendliche Menge, w. z. b. w.

Es ist für die Hauptsätze der Theorie der abzählbar unendlichen Mengen nicht erforderlich, weitere allgemeine Sätze über unendliche Mengen aufzustellen. Daher soll hier darauf verzichtet werden, den auf solche allgemeine Sätze sich stützenden Beweis der Tatsache durchzuführen, daß *die Existenz unendlicher Mengen von dem Axiomensystem des* § 1 (*einschließlich der Postulierung mindestens einer Menge*) *unabhängig ist*.

für den naiven Begriff des Endlichen (Verwendung der natürlichen Zahlen) ist diese Tatsache ohnehin einleuchtend. Um für die Mengenlehre auch unendliche Mengen zu sichern, mußte Zermelo (a. a. O.) daher ein weiteres Axiom einführen. Dieses lautet mit einer Veränderung, die dadurch bedingt ist, daß hier nicht wie in Z. schon Axiom II die Existenz der Nullmenge fordert:

Axiom VII. Es gibt eine Menge, und zwar mindestens eine Menge Z von der Eigenschaft, daß erstens die Nullmenge Element von Z ist und zweitens Z mit jedem Element $a \varepsilon Z$ zugleich auch das Element $\{a\} \varepsilon Z$ enthält. (*Axiom des Unendlichen.*)

Die Nullmenge existiert nach Nr. 1 auf Grund des ersten Teiles von VII und wird nicht etwa erst durch VII postuliert.

28. Dieses Axiom sichert zwar unendliche Mengen überhaupt (Nr. 30), nicht aber alle unendlichen Mengen der genetischen (Cantorschen) Mengenlehre[14]). Bedeutet z. B. Z eine beliebige Menge von der in VII bezeichneten Eigenschaft, und setzt man $\mathfrak{U} Z = Z_1$, $\mathfrak{U} Z_1 = Z_2$ usw., so folgt, wie sich zeigen läßt, aus den Axiomen noch nicht die Existenz der Menge $\{Z, Z_1, Z_2, \ldots\}$. Will man das Gebiet der sehr umfassenden Mengen beherrschen, so muß man daher statt VII ein weitergehendes Axiom des Unendlichen aufstellen, das etwa noch die Aussage von Nr. 12 *ohne die Schlußbedingung* („vorausgesetzt ...“) und unter einer gewissen Erweiterung des Funktionsbegriffs enthält.

Für die Zwecke der gewöhnlich verwendeten Mengen reicht aber das viel einfachere Axiom VII aus; es soll daher nachstehend zugrunde gelegt werden.

29. Z sei eine beliebige Menge von der in VII bezeichneten Art, $U = \mathfrak{U} Z$ ihre Potenzmenge und $U' = U_{0 \varepsilon y}$ die Menge derjenigen Teilmengen y von Z, die die Nullmenge als Element enthalten. Ist x eine unbestimmte Menge, so stellt $\varphi(x) = x_{\{y\} \varepsilon x}$ die Teilmenge derjenigen Elemente y von x dar, für die auch die Menge $\{y\}$ Element von x ist. Ein Element x von U' (d. h. eine 0 enthaltende Teilmenge von Z) besitzt daher dann und nur dann auch noch die zweite in VII ausgedrückte Eigenschaft, wenn $\varphi(x)$ *alle* Elemente von x umfaßt. $U'_{\varphi(\mathfrak{x})=\mathfrak{x}} = \overline{U} \nleqslant U$ stellt also die Menge derjenigen Teilmengen x von Z dar, die ebenso wie Z selbst zugleich mit jedem Element $a \varepsilon x$ auch das Element $\{a\}$ und ferner das Element 0 enthalten. Endlich hat auch der Durchschnitt $Z_0 = \mathfrak{D} \overline{U}$ offenbar dieselben zwei Eigenschaften.

Sind Z und Z' zwei beliebige Mengen von der in VII geforderten Art, Z_0 und Z'_0 die im Sinn des vorigen Absatzes ihnen zugehörigen Durch-

[14]) Math. Annalen 86 (1922), S. 230f.

schnittsmengen, so folgt unmittelbar (vgl. Z., Nr. 14) $Z_0 = Z_0'$. Es gilt also:

Es gibt eine Menge Z_0 von der in VII *gekennzeichneten Art, die Teilmenge einer jeden derartigen Menge ist und also die „kleinste" Menge dieser Art darstellt.* Z_0 hat offenbar die Form $\{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \ldots\}$ und stimmt bis auf die Bezeichnung mit der Menge der natürlichen Zahlen überein.

30. *Jede Menge Z der in* VII *bezeichneten Art, insbesondere also die vorstehend behandelte Menge Z_0, ist eine unendliche Menge.*

Gemäß Nr. 16 sei T eine zu Z äquivalente und elementefremde Menge und $\Omega \leqq Z \cdot T$ eine Abbildung zwischen Z und T. Ist $x = \{\zeta, \tau\}$ ein beliebiges Element von $Z \cdot T$, so enthält das (nach Definition 1 des § 3 eindeutig bestimmte) Element $\omega = \{\zeta_0, \tau\}$ von Ω, in dem das nämliche Element $\tau \varepsilon T$ vorkommt wie in x, ein Element ζ_0 von Z, das sich (wegen $\tau = \mathfrak{S}[x, T]$) als Funktion von x in der Form

$$\zeta_0 = \varphi(x) = \mathfrak{S} Z_{\{y, \mathfrak{S}[x, T]\} \varepsilon \Omega}$$

darstellt. Daher bilden diejenigen Elemente $x = \{\zeta, \tau\} = \{\{\zeta_0\}, \tau\}$ von $Z \cdot T$, deren zu Z gehöriges Element die durch x (bzw. τ) im angeführten Sinn bestimmte Form $\{\zeta_0\} = \{\varphi(x)\}$ haben, die Elemente einer Teilmenge $\Phi = (Z \cdot T)_{\mathfrak{S}[\mathfrak{x}, Z] = \{\varphi(\mathfrak{x})\}} \leqq Z \cdot T$, und Φ ist offenbar (vgl. Z., Nr. 36) eine Abbildung zwischen T und einer Teilmenge $Z_1 \leqq Z$, in der all die Elemente der Form $\{\zeta_0\}$ und nur sie, also sicher nicht das Element 0 von Z enthalten ist. Da $Z \sim T \sim Z_1$, so ist Z nach Nr. 17 der echten Teilmenge $Z_1 \leqq Z$ äquivalent, womit die Behauptung nach Definition 1 bewiesen ist.

Auf Grund dieses Ergebnisses und der Beziehung zwischen der Menge Z_0 und den natürlichen Zahlen definiert man:

Definition 2. Eine Menge heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie der in Nr. 29 eingeführten Menge Z_0 äquivalent ist.

In Umkehrung der vorigen Nummer gilt:

31. Hauptsatz der abzählbar unendlichen Mengen. *Jede unendliche Menge M besitzt eine abzählbare Teilmenge $M_0 \leqq M$.*

Die Menge M, die nach Nr. 16 als elementefremd zu Z_0 (Nr. 29) angenommen werden kann, sei der echten Teilmenge $M' = M - R \leqq M$ äquivalent, wo $R \neq 0$. Es sei ϱ ein beliebiges, von nun an festes Element von R, ferner $\mathsf{T}' = (\mathfrak{U}(M \cdot Z_0))_{\{\varrho, 0\} \varepsilon y} \leqq \mathfrak{U}(M \cdot Z_0)$ die Menge derjenigen Teilmengen y von $M \cdot Z_0$, in denen das Paar $\{\varrho, 0\}$ als Element auftritt; schließlich sei $\{\Phi, \Psi\}$ nach Nr. 17 eine Abbildung zwischen den äquivalenten Mengen M und M', die nach Nr. 18 jedem Element $\mu \varepsilon M$

in $\chi(\mu) = \mu' \varepsilon M'$ zuordnet. Ist $x \neq M \cdot Z_0$ ein beliebiges Element von ', so ist die Menge derjenigen Elemente $y = \{\mu, \zeta\} \varepsilon x$, für die auch das ugehörige Paar $\{\mu', \{\zeta\}\} = \tau(y)$ Element von x ist, eine Funktion und Teilmenge von x, nämlich $x_{\tau(y) \varepsilon x} = \varphi(x) \neq x$; hierbei ist offenbar $(y) = \{\chi(\mathfrak{S}[y, M]), [y, Z_0]\}$. Die Menge derjenigen Elemente x von T', lie zu ihren *sämtlichen* Elementen $\{\mu, \zeta\}$ auch das zugehörige Element $\mu', \{\zeta\}\}$ enthalten, ist also die Teilmenge $\mathsf{T} = \mathsf{T}'_{\varphi(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}} \neq \mathsf{T}'$, und der zugehörige Durchschnitt $\mathsf{A} = \mathfrak{D}\,\mathsf{T}$ besitzt offenbar gleichfalls die Eigenschaft, erstens das Element $\{\varrho, 0\}$ und zweitens mit jedem Element $\{\mu, \zeta\}$ auch das entsprechende Element $\{\mu', \{\zeta\}\}$ zu enthalten. Nun bilden die Elemente x von A, die zu allen übrigen Elementen von A elementefremd sind, die Elemente einer Teilmenge $\mathsf{A}_0 \neq \mathsf{A}$; es ist $\mathsf{A}_0 = \mathsf{A}_{\psi(\mathfrak{x}) = \mathsf{A} - \{\mathfrak{x}\}}$, wo $\psi(x) = \mathsf{A}_{[x, y] = 0}$ die Menge der zu unbestimmtem x elementefremden Elemente y von A bedeutet.

Wie in Z., S. 280 unten und 281 (wo A_0 statt des hier gebrauchten A und A'_0 statt A_0 steht), erkennt man schließlich, daß $\mathsf{A}_0 = \mathsf{A}$ und $M_0 = [\mathfrak{S}\mathsf{A}, M] \sim Z_0$ ist, womit wegen $M_0 \neq M$ der Beweis vollendet ist.

(Eingegangen am 20. Juni 1924.)

Zwei Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn Perron

Von

A. Khintchine in Moskau.

Die (wegen äußerer Umstände sehr verspätete) Lektüre der schönen Arbeit von Herrn O. Perron „Über diophantische Approximationen“[1] veranlaßt mich, die beiden nachstehenden, den Gegenstand der genannten Abhandlung sehr nahe berührenden Bemerkungen zu veröffentlichen.

1.

Die lineare Form mit reellen Koeffizienten $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$

$$\sum_{k=1}^{n} \Theta_k x_k + x_{n+1} \tag{1}$$

heiße *extrem*, wenn ein $C = C(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n) > 0$ existiert derart, daß wie auch die ganzen, nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ gewählt sein mögen,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \Theta_k a_k + a_{n+1} \right| > \frac{C}{r^n}$$

gilt, wo $r = \mathrm{Max}\,(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|)$ gesetzt ist.

Andererseits soll ein System von n reellen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ als *extrem* bezeichnet werden, wenn es ein $B = B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) > 0$ gibt derart, daß, wie auch die ganzen Zahlen $q > 0$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gewählt sein mögen, wenigstens eine von den n Ungleichungen

$$\left| \alpha_k - \frac{p_k}{q} \right| > \frac{B}{q^{1+\frac{1}{n}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt ist.

Im § 1 der zitierten Abhandlung von Herrn Perron[2] ist implizit der Beweis für den folgenden Satz enthalten:

---

[1] Math. Annalen 83 (1921), S. 77—84.

[2] Vgl. S. 79.

Ist die Form (1) *extrem, so bilden ihre Koeffizienten* $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ *ein extremes Zahlensystem.*

Nun scheint mir bemerkenswert, daß auch die Umkehrung hiervon gilt, nämlich:

Wenn die Koeffizienten $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ *der Form* (1) *ein extremes Zahlensystem bilden, so ist die Form* (1) *extrem.*

Es ist demnach die Extremeigenschaft des Koeffizientensystems für diejenige der Form charakteristisch. Infolge bekannter Sätze über Diophantische Approximationen bedeutet das in leicht verständlicher Ausdrucksweise folgendes: Damit die Form (1) von der „schlechtestmöglichen Ordnung" unendlich klein wird, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Koeffizienten ein Zahlensystem bilden, welches eine „schlechtestmögliche" gemeinsame Approximation mittels rationaler Brüche gestattet. In der Tat kann man da bekanntlich die Ungleichung

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \Theta_k a_k + a_{n+1} \right| < \frac{1}{r^n}$$

für *jede* Form, sowie die Ungleichungen

$$\left| \alpha_k - \frac{p_k}{q} \right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{n}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für *jedes* Zahlensystem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ auf unendlich viele Weisen mit ganzen $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ resp. $q, p_1, p_2, \ldots, p_n$ erfüllen.

Beweis. Die Form sei nicht extrem, $\eta < 1$ positiv und beliebig klein. Dann ist nur zu beweisen, daß ganze Zahlen $q > 0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ so gewählt werden können, daß

$$\left| \Theta_k - \frac{p_k}{q} \right| < \frac{\eta}{q^{1+\frac{1}{n}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gilt.

Zu dem Ende setze man $C = C(n) = 2(n+2)(\sqrt{n})^n$ und

$$\varepsilon = \frac{\eta^{n^2}}{2^{2n+1} C^{n+1}}, \tag{2}$$

was jedenfalls

$$\varepsilon < \frac{1}{2^{n+1} C} \tag{3}$$

zur Folge hat.

Nach unserer Voraussetzung ist es dann möglich, ganze, nicht sämtlich verschwindende Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ derart zu wählen, daß

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \Theta_k a_k + a_{n+1}\right| < \frac{\varepsilon}{r^n} \tag{4}$$

wird, wobei wieder $r = \mathrm{Max}(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|)$ und folglich $r \geqq 1$ ist.

Aus (3) folgt a fortiori

$$\frac{\varepsilon^{\frac{1}{n}} (2C)^{\frac{1}{n}}}{r} < \frac{1}{2}, \tag{5}$$

während (2) in Hinsicht auf (5)

$$(2C)^{\frac{n+1}{n}} \varepsilon^{\frac{1}{n}} < \eta^n \left(1 - \frac{\varepsilon^{\frac{1}{n}} (2C)^{\frac{1}{n}}}{r}\right),$$

also

$$\frac{2C}{\eta^n} < \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{n}} \varepsilon^{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{r}$$

ergibt.

Folglich existiert eine ganze Zahl $t > 0$, die wir fortan fixiert denken und die den Ungleichungen

$$\frac{2C}{\eta^n} < \frac{t}{r} < \frac{1}{(2C)^{\frac{1}{n}} \varepsilon^{\frac{1}{n}}} \tag{6}$$

genügt.

Nun folgt aus der zweiten dieser Ungleichungen, daß

$$1 - C\varepsilon \left(\frac{t}{r}\right)^n > \frac{1}{2},$$

was mit der ersten der Ungleichungen (6)

$$\frac{t}{r}\left(1 - C\varepsilon\left(\frac{t}{r}\right)^n\right) = \frac{t}{r} - C\varepsilon\left(\frac{t}{r}\right)^{n+1} > \frac{2C}{\eta^n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{C}{\eta^n}$$

zur Folge hat.

Daraus folgt weiter

$$Cr < t\eta^n - \frac{C\varepsilon t^{n+1} \eta^n}{r^n},$$

dann a fortiori

$$Cr < t\eta^n - \frac{C\varepsilon t^{n+1} \eta^n}{r^n} + \frac{C\varepsilon t}{r^n},$$

woraus man leicht

$$\frac{Crt^{n-1} - 1}{1 - \frac{C\varepsilon t^n}{r^n}} < (t\eta)^n - 1$$

erschließt.

Folglich existiert eine ganze Zahl $M > 0$, die nunmehr fixiert gedacht werden soll und die den Ungleichungen

$$\frac{C r t^{n-1} - 1}{1 - \frac{C \varepsilon t^n}{r^n}} < M < (t\eta)^n \tag{7}$$

Genüge leistet.

Die erste dieser Ungleichungen ergibt

$$M + 1 > C\left(r t^{n-1} + \frac{M \varepsilon \cdot t^n}{r^n}\right). \tag{8}$$

Nun soll q die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, M$ durchlaufen. Zu jedem Werte von q wähle man dann die ganzen Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$, so daß

$$0 \leqq \alpha_k^{(q)} = q\,\Theta_k - p_k < 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gilt. Wenn dann $\alpha_1^{(q)}, \alpha_2^{(q)}, \ldots, \alpha_n^{(q)}$ als Koordinaten eines Punktes $\alpha^{(q)}$ im n-dimensionalen Raume aufgefaßt werden, liegen alle $M+1$ Punkte $\alpha^{(q)}$ ($q = 0, 1, 2, \ldots, M$) im Einheitswürfel. Nun teile man diesen Würfel in t^n gleiche Würfel von der Kantenlänge $\frac{1}{t}$ und dem Volumen $\frac{1}{t^n}$. Wenn man übliche Bedingungen über die Begrenzung dieser Würfel voraussetzt, muß jeder der Punkte $\alpha^{(q)}$ einem und nur einem dieser Teilwürfel angehören. Aber nicht alle Teilwürfel können wirklich Punkte $\alpha^{(q)}$ enthalten, und das ist natürlich der Kern des Beweises. Aus (4) folgt nämlich

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k^{(q)} = q \sum_{k=1}^{n} a_k \Theta_k - \sum_{k=1}^{n} a_k p_k = q \frac{\vartheta \varepsilon}{r^n} - q\,a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k p_k = q \frac{\vartheta \varepsilon}{r^n} - c,$$

wo c ganz und $|\vartheta| < 1$ ist, also

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k^{(q)} + c \right| < \frac{M \varepsilon}{r^n}.$$

Es ist nun, wenn $N = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$ gesetzt wird,

$$\frac{\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k^{(q)} + c \right|}{N} < \frac{M \varepsilon}{N r^n} \leqq \frac{M \varepsilon}{r^{n+1}}$$

die „Entfernung“ des Punktes $\alpha^{(q)}$ von der „Ebene“

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + c = 0. \tag{9}$$

Für jeden Punkt $\alpha^{(q)}$ gibt es somit eine „Ebene“ (9), von welcher dieser Punkt um weniger als $\frac{M \varepsilon}{r^{n+1}}$ entfernt ist. Wenn man also um jede

solche „Ebene“ eine „Schicht“ der Dicke $\frac{2M\varepsilon}{r^{n+1}}$ begrenzt denkt, so muß jeder Teilwürfel, der ein $\alpha^{(q)}$ enthalten soll, mit einer dieser „Schichten“ gemeinsame Punkte haben. Nun ist $\frac{\sqrt{n}}{t}$ die größte „Entfernung“ zweier Punkte eines Teilwürfels. Wenn wir folglich die Dicke einer jeden der eben definierten „Schichten“ beiderseits um $\frac{\sqrt{n}}{t}$ erweitern, so muß jeder Teilwürfel, der ein $\alpha^{(q)}$ enthalten soll, einer von diesen neuen „Schichten“ von der Dicke $\frac{2M\varepsilon}{r^{n+1}}+\frac{2\sqrt{n}}{t}$ vollständig angehören. Im folgenden soll V die Summe der Volumina aller dieser „Schichten“ bedeuten, soweit sie dem Einheitswürfel angehören.

Was erstens die Anzahl der „Schichten“ betrifft, so kann sie folgendermaßen abgeschätzt werden. Zwei benachbarte von den „Ebenen“ (9) haben den Abstand $\frac{1}{N}$. Da die größte „Entfernung“ zweier Punkte des Einheitswürfels $\sqrt{n}$ beträgt, können den Einheitswürfel nicht mehr als $\frac{\sqrt{n}}{1/N}\leqq nr$ von diesen „Ebenen“ durchstreifen, also nicht mehr als $nr+2$ „Schichten“ mit diesem Würfel gemeinsame Punkte haben.

Ferner ist die Dicke einer jeden „Schicht“ gleich $\frac{2M\varepsilon}{r^{n+1}}+\frac{2\sqrt{n}}{t}$, während das Inhaltsmaß eines jeden zur Dicke senkrechten „Schnittes“ offenbar $(\sqrt{n})^{n-1}$ nicht übertreffen kann.

Alles in allem ist

$$V<(nr+2)(\sqrt{n})^{n-1}\left\{\frac{2M\varepsilon}{r^{n+1}}+\frac{2\sqrt{n}}{t}\right\}$$

$$\leqq 2r(n+2)(\sqrt{n})^{n}\left\{\frac{M\varepsilon}{r^{n+1}}+\frac{1}{t}\right\}=C\left\{\frac{M\varepsilon}{r^{n}}+\frac{r}{t}\right\}.$$

Nun bezeichne K die Anzahl der Teilwürfel, welche Punkte $\alpha^{(q)}$ enthalten. Nach dem Vorhergehenden ist

$$\frac{K}{t^n}\leqq V,$$

also

$$K<C\left\{\frac{M\varepsilon t^n}{r^n}+rt^{n-1}\right\},$$

also wegen (8)

$$K<M+1.$$

Da genau $M+1$ Punkte $\alpha^{(q)}$ vorhanden sind, müssen deswegen irgend zwei derselben einem und demselben Teilwürfel angehören. In üblicher Weise schließt man daraus die Existenz ganzer Zahlen $q>0,\ p_1,\ldots,p_n$ so daß

$$|q\Theta_k-p_k|<\frac{1}{t} \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

lso wegen (7)

$$|q\Theta_k - p_k| < \frac{\eta}{M^{\frac{1}{n}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

nd a fortiori

$$|q\Theta_k - p_k| < \frac{\eta}{q^{\frac{1}{n}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ilt, womit alles bewiesen ist.

2.

Herr Perron hat in seiner genannten Abhandlung zum erstenmal lie Existenz extremer Zahlensysteme für jede Gliederzahl n bewiesen. Aus seinem diesbezüglichen Hauptsatz folgt speziell, daß, wenn Θ eine eelle algebraische Zahl vom Grade $n+1$ ist, die Zahlen $\Theta, \Theta^2, \Theta^3, \ldots, \Theta^n$ in extremes System bilden. Dieser Satz kann als eine Verschärfung des ekannten Liouvilleschen Satzes über algebraische Zahlen betrachtet erden, denn letzterer kann aus ihm leicht gefolgert werden (für $n = 1$ allen die beiden Sätze zusammen).

Dieser Satz verschärft aber den Liouvilleschen in einer ganz anderen Richtung, als es die bekannten Resultate der Herren Thue[3]) und Siegel[4]) un; und in einer bestimmten Hinsicht kann er als eine stärkere Verschärfung betrachtet werden, wie ich hier zeigen will.

Keines der hier zitierten, für den algebraischen Charakter einer Zahl notwendigen Kennzeichen ist für denselben hinreichend; auch das Perronsche nicht. Da aber die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar, also a fortiori von Lebesgueschem Maße Null ist, kann man ein Kennzeichen für algebraische Zahlen desto schärfer nennen, je kleiner das Maß der Menge der Zahlen ist, welche zwischen 0 und 1 liegen und dem vorliegenden Kennzeichen Genüge leisten. Nun ist im Falle des Liouvilleschen Kennzeichens, abgesehen vom Falle $n = 1$, das Maß der betreffenden Menge gleich 1; und die Verschärfungen von Thue und Siegel[5]) verbessern nichts in dieser Beziehung. Diese Kennzeichen sind also sämtlich nicht nur für algebraische, sondern auch für fast alle transzendente Zahlen erfüllt. Im Gegensatz dazu soll hier gezeigt werden, daß dem Perronschen Kriterium nur eine Zahlenmenge vom Maße Null genügen kann; für eine angegebene transzendente Zahl besteht also eine Wahrscheinlichkeit $= 1$, daß sie dem Kennzeichen nicht genügt.

---

[3]) Journal für die reine und angew. Mathematik **135** (1909).

[4]) Math. Zeitschrift **10** (1921).

[5]) Auch nicht der tieferliegende Satz von Siegel, Math. Annalen **83** (1921), S. 80.

Um das einzusehen, genügt es offenbar, folgendes zu beweisen.

Satz. *Jede Zahl α zwischen 0 und 1, mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null, erfüllt folgende Bedingung: Es seien $\varepsilon > 0$ beliebig und k ganz positiv. Dann gibt es solche $k+1$ ganze rationale Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k, q$ $(q > 0)$, daß*

$$\left|\alpha^i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{q^{1+\frac{1}{k}}} \quad \text{für} \quad 1 \leqq i \leqq k$$

ist.

Beweis. Da die Vereinigung einer abzählbaren Menge von Mengen, deren Maß gleich Null ist, wieder eine Menge derselben Art bildet, so genügt es offenbar, den Satz für beliebige, aber fest gewählte ε und k zu beweisen.

Es sei α eine beliebige Zahl zwischen 0 und 1, die wir jetzt noch *irrational* voraussetzen.

Wir betrachten irgendeine orthogonale und normale Matrix

$$(1) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots \alpha_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & \ldots \alpha_{kk} \end{array} \right\|,$$

deren erste Zeile durch

$$\alpha_{1i} = i\alpha^{i-1} \cdot M, \qquad M = \frac{1}{+\sqrt{1^2 + (2\alpha)^2 + (3\alpha^2)^2 + \ldots + (k\alpha^{k-1})^2}}$$

bestimmt sei, während die übrigen beliebig sein mögen, und die zugehörige Koordinatentransformation

$$x_i' = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \ldots + \alpha_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, k$$

im k-dimensionalen Raume.

Wir setzen $\sigma = \frac{\varepsilon}{3k}$ und teilen den Raum in Parallelepipeda, deren einzelnes durch die Ungleichungen

$$\frac{i_1}{\sigma^{k-1} t} \leqq x_1' < \frac{i_1 + 1}{\sigma^{k-1} t},$$

$$i_s \frac{\sigma}{t} \leqq x_s' < (i_s + 1)\frac{\sigma}{t} \qquad (s = 2, 3, \ldots, k$$

bestimmt sein möge, wo t eine feste, später näher zu bestimmende positive Zahl bedeutet, während $i_1, i_2, \ldots, i_k$ unabhängig voneinander alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen. Jedes Parallelepipedum hat offenbar ein Volumen $= \frac{1}{t^k}$.

Nun bedeute n die Anzahl der Parallelepipeda, welche vollständig der auch nur zum Teil dem durch die Ungleichungen

$$0 \leqq x_i < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

efinierten Würfel angehören. Es sei ferner $P(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ ein Punkt, er einem Parallelepipedum A angehört, welches seinerseits mit dem Würfel (2) den Punkt $Q(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ gemeinsam haben möge.

Dann ist für $1 \leqq r \leqq k$

$$|y_r - z_r| = |\beta_{r1}(y_1' - z_1') + \beta_{r2}(y_2' - z_2') + \ldots + \beta_{rk}(y_k' - z_k')| < \frac{k}{\sigma^{k-1} t},$$

o unter $\|\beta_{il}\|$ die zu (1) inverse Matrix gemeint ist. Daraus folgt nun, aß der Punkt P dem Würfel angehört, welcher aus dem Würfel (2) durch ine Vergrößerung im linearen Verhältnis $2:1$ vom Mittelpunkte aus entteht, wenn nur

$$\frac{k}{\sigma^{k-1} t} < \frac{1}{2}, \quad \text{also wenn} \quad t > \frac{2k}{\sigma^{k-1}}$$

t, was wir jetzt annehmen wollen.

Es sind also alle n Parallelepipeda, von denen eben die Rede war, diesem neuen Würfel vom Volumen 2^k enthalten; folglich ist

$$n \cdot \frac{1}{t^k} \leqq 2^k, \qquad n \leqq (2t)^k.$$

un soll q der Reihe nach die Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots, (2t)^k$$

urchlaufen. Zu jedem dieser q bestimmen wir dann k Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ erart, daß

$$0 \leqq q\alpha^i - p_i < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

t. Der Punkt $x_i = q\alpha^i - p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ des k-dimensionalen Raumes t folglich für jedes q im Würfel (2) und folglich in einem unserer n arallelepipeda enthalten. Da q dabei $(2t)^k + 1$ verschiedene Werte erält und $n \leqq (2t)^k$ ist, so müssen wenigstens in eines der Parallelepipeda wei von den konstruierten Punkten fallen. Es seien dies die Punkte $_i = q^{(1)}\alpha^i - p_i^{(1)}$ und $x_i = q^{(2)}\alpha^i - p_i^{(2)}$; der Bestimmtheit wegen setze an $q^{(1)} < q^{(2)}$ voraus; man setze ferner

$$q = q^{(2)} - q^{(1)}$$
$$p_i = p_i^{(2)} - p_i^{(1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Denn findet man

$$|\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}(q\alpha^s-p_s)|=|\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}(q^{(2)}\alpha^s-p_s^{(2)})-\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}(q^{(1)}\alpha^s-p_s^{(1)})|$$

$$<\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma^{k-1}t} & \text{für } i=1,\\[2ex] \dfrac{\sigma}{t} & \text{für } 2\leqq i\leqq k.\end{cases}$$

Wegen $q\leqq(2t)^k$, also $t\geqq\frac{1}{2}q^{\frac{1}{k}}$, erhält man daraus, indem man durch q dividiert,

$$|\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}\left(\alpha^s-\frac{p_s}{q}\right)|<\begin{cases}\dfrac{2}{\sigma^{k-1}q^{1+\frac{1}{k}}} & \text{für } i=1,\\[2ex] \dfrac{2\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}} & \text{für } 2\leqq i\leqq k.\end{cases}$$

Man setze nun

$$C_q=\sum_{s=1}^{k}\alpha_{1s}\left(\alpha^s-\frac{p_s}{q}\right),\quad\text{also}\quad|C_q|<\frac{2}{\sigma^{k-1}q^{1+\frac{1}{k}}},$$

und

$$r=M\cdot\sum_{i=1}^{k}(i\alpha^{i-1})^2=\frac{1}{M}.$$

Wir betrachten das Intervall, das durch die Ungleichungen

$$(3)\qquad \alpha-\frac{C_q}{r}-\frac{\sigma}{rq^{1+\frac{1}{k}}}<y<\alpha-\frac{C_q}{r}+\frac{\sigma}{rq^{1+\frac{1}{k}}}$$

bestimmt und dessen Länge folglich $\dfrac{2\sigma}{rq^{1+\frac{1}{k}}}$ ist. Wir setzen noch

$$\varphi_i(y)=\alpha_{i1}\left(y-\frac{p_1}{q}\right)+\alpha_{i2}\left(y^2-\frac{p_2}{q}\right)+\ldots+\alpha_{ik}\left(y^k-\frac{p_k}{q}\right).$$

Gehört nun y dem Intervall (3) an, so ist offenbar

$$|\varphi_1(y)|=|C_q+\sum_{s=1}^{k}\alpha_{1s}(y^s-\alpha^s)|=|C_q+(y-\alpha)[r+O(y-\alpha)]|$$

$$=|C_q+(y-\alpha)r+O(y-\alpha)^2|<\frac{\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}}+O(y-\alpha)^2.$$

Vegen der Irrationalität von α wächst dabei offenbar q mit t über alle Grenzen, und kann folglich beliebig groß gedacht werden. Wegen $y-\alpha| < \frac{A}{q^{1+\frac{1}{k}}}$, wo A von q unabhängig ist, muß also für genügend roßes q

$$|\varphi_1(y)| < \frac{3\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}}.$$

ndererseits findet man für $i>1$ infolge der Orthogonalität der Matrix (1)

$$\varphi_i(y) = \Big|\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}(y^s-\alpha^s)+\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}\Big(\alpha^s-\frac{p_s}{q}\Big)\Big| < \Big|\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}(y^s-\alpha^s)\Big|+\frac{2\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}}$$

$$= \frac{2\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}}+\Big|(y-\alpha)\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}[s\alpha^{s-1}+O(y-\alpha)]\Big|$$

$$= \frac{2\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}}+O(y-\alpha)^2 < \frac{3\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}}$$

ir genügend großes q.

Alles in allem, ist also für $i=1, 2, \ldots, k$, für genügend großes q nd für jedes dem Intervall (3) angehörende y

$$|\varphi_i(y)| < \frac{3\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}}.$$

olglich ist für dieselben y, i und q

$$\Big|y^i-\frac{p_i}{q}\Big| = |\beta_{i1}\varphi_1(y)+\beta_{i2}\varphi_2(y)+\ldots+\beta_{ik}\varphi_k(y)| < \frac{3k\sigma}{q^{1+\frac{1}{k}}} = \frac{\varepsilon}{q^{1+\frac{1}{k}}}.$$

un ist die Länge des Intervalls (3) gleich

$$\frac{2\sigma}{rq^{1+\frac{1}{k}}},$$

nd die Entfernung seines Mittelpunktes von α

$$\frac{C_q}{r} < \frac{2}{r\sigma^{k-1}q^{1+\frac{1}{k}}}.$$

Das Verhältnis dieser beiden Zahlen ist also größer, als die Konstante σ^k, die weder von α noch von q abhängt. Da dieses Intervall (3) eliebig nahe an α angenommen werden darf, so schließt man weiter so: ie Menge der Zahlen, welche der im Wortlaut des Satzes III aufgestellten edingung für unsere festen ε, k nicht Genüge leisten, soll mit E be-

zeichnet werden. Wir haben durch das Vorangehende bewiesen, daß die Menge E im Punkte α nicht eine Dichtigkeit $= 1$ besitzen kann. Und da α eine beliebige irrationale Zahl ist, so folgt aus bekannten Sätzen der metrischen Mengenlehre, daß E eine Menge vom Maße Null ist, w. z. b. w.

Andererseits zeigt unsere Betrachtung, daß die Menge E nirgends dicht ist. Daraus folgt bekanntlich, daß die Menge der Zahlen, welche der Bedingung des Satzes nicht Genüge leisten, eine *Menge der I. Kategorie* ist nach der Baireschen Klassifikation.

Moskau, den 24. Dez. 1923.

(Eingegangen am 15. Januar 1924.)

Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung.

I. Mitteilung.

Eine neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen. Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur.

Von

Felix Bernstein in Göttingen und Gustav Doetsch in Stuttgart.

---

§ 1.

Eine Korrespondenz zwischen zwei Funktionsbereichen.

Die Methode[1]), die im Folgenden dargelegt wird, basiert auf Ideen us dem Gebiet der Funktionalanalysis, d. h. der Theorie der Funktionalperationen oder Funktionen von Funktionen, und zwar handelt es sich m eine spezielle Funktionaloperation, die *Laplace-Transformation*, die ich bereits bei einer Reihe von Problemen, so bei der Behandlung von ntegro-Differentialgleichungen einer gewissen Bauart (vom „Faltungsypus“)[2]), und bei der Aufsuchung tiefliegender transzendenter Additions-

---

[1]) Vgl. die vorläufige Mitteilung: Doetsch, Über das Problem der Wärmeleitung Vortrag auf der Mathematikerversammlung in Marburg, September 1923), Jahresber. deutsch. Math. Ver. **33** (1924), S. 45—52. — Die der Methode zugrunde liegende dee der direkten Anwendung der Laplace-Transformation auf die Randwertaufabe der Wärmeleitung haben die Verfasser nacheinander unabhängig gehabt. Die egenwärtige Fassung rührt von dem an zweiter Stelle genannten Verfasser her.

[2]) Doetsch, Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus, Math. Ann. 9 (1923), S. 192—207. Siehe auch Bernstein, Die Integralgleichung der elliptihen Thetanullfunktion. Zweite Note, Kon. Akad. d. Wetensch. te Amsterdam, Vis- en nat. Afd. 27 Nov. 1920, S. 759—765.

theoreme[3]), als äußerst zugkräftig erwiesen hat. Die Laplace-Transformation[4])

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt, \quad \text{kurz} \quad f = L(F),$$

vermittelt den Zusammenhang zwischen zwei Bereichen von Funktionen, dem „Oberbereich" der Funktionen $F(t)$ und dem „Unterbereich" der Funktionen $f(s)$, wobei jeder *„Oberfunktion"* $F(t)$, die für reelle $t > 0$ definiert ist und für die das (beim Nullpunkt eventuell uneigentliche) Integral für ein gewisses (komplexes) $s = s_0$ absolut konvergiert, eindeutig eine mindestens in der Halbebene $\Re s > \Re s_0$ existierende und analytische *„Unterfunktion"* $f(s)$ zugeordnet wird, während umgekehrt zu jedem dieser $f(s)$ unendlich viele $F(t)$ gehören, die sich aber nur um „Nullfunktionen", d. h. Funktionen $N(t)$, für die $\int_0^t N(\tau)\, d\tau \equiv 0$ ist, unterscheiden. Es gibt also zu einer Unterfunktion höchstens eine *stetige* Oberfunktion.

Die Eigenschaften der Oberfunktionen, die Beziehungen zwischen ihnen und die an ihnen vorgenommenen Operationen spiegeln sich in den Eigenschaften und Beziehungen der entsprechenden Unterfunktionen und gewissen Operationen an diesen wieder, und zwar wird man sich für diese Korrespondenz besonders dann interessieren, wenn die Eigenschaften beim Übergang in den anderen Bereich einfacher werden. So zeigte es sich (vgl. die Arbeiten unter [2]), [3])) daß die Oberfunktionen gewissen Integral- und Integrodifferentialgleichungen oder transzendenten Additionstheoremen genügen können, während für die entsprechenden Unterfunktionen algebraische und Differentialgleichungen, bzw. algebraische Additionstheoreme gelten. Das fundamentale Beispiel hierzu wird durch die zuerst von F. Bernstein (vgl. l. c.[2])) studierte Tatsache geliefert, daß die Unterfunktion der elliptischen Thetanullfunktion sich in einfacher Weise durch die elementare Kotangensfunktion ausdrückt. Die gegenwärtige Arbeit zeigt einen weiteren Fall auf, wo die Korrespondenz zu einer Vereinfachung führt, wo nämlich *partiellen* Differentialgleichungen im Oberbereich *totale* im Unterbereich entsprechen. Um die Darlegung nicht durch unnötige Allgemeinheit zu belasten, sei die Theorie an einem typischen Beispiel, der einfachsten partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung von parabolischem

---

[3]) Bernstein und Doetsch, Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion. Vierte Note, Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl. 1922, S. 47–52. — Doetsch, Transzendente Additionstheoreme der elliptischen Thetafunktionen und andere Thetarelationen vom Faltungstypus, Math. Ann. **90** (1923), S. 19—25.

[4]) Für die Eigenschaften der Laplace-Transformation, die im Folgenden gebraucht werden, sei auf § 1 der unter [2]) zitierten Arbeit von Doetsch verwiesen.

ypus unter gewissen Randbedingungen, vorgeführt, wobei schon alle esentlichen Momente in Erscheinung treten werden.

§ 2.

as Problem im Oberbereich und seine Übertragung in den Unterbereich.

Ein homogener Stab von verschwindender Dicke und der Länge c ird an seinen Enden $x = 0$ und $x = c$ auf den mit der Zeit t veränderchen Temperaturen $A(t)$ bzw. $B(t)$ gehalten. Zur Zeit $t = 0$ sei die emperatur in den Zwischenpunkten $0 < x < c$ durch $\Phi(x)$ gegeben. eitliche Ausstrahlung finde nicht statt. Infolge der Wärmeleitung bildet ch eine von Ort und Zeit abhängige *Temperaturverteilung* $\Phi(x, t)$ heraus, ie bei passender Wahl der Zeiteinheit der Gleichung

$$1) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

enügt. Die Bestimmung der Temperatur in einem beliebigen Punkte x $0 < x < c$) zu einer späteren Zeit $t > 0$ erfordert also die Integration ieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung in dem Halbstreifen $< x < c$, $t > 0$ der xt-Ebene, wobei als Randbedingungen vorgechrieben sind:

$$2a) \qquad \Phi(x, t) \to \Phi(x) \quad \text{für} \quad t \to 0 \quad \text{bei} \quad 0 < x < c;$$

$$2b) \qquad \begin{cases} \Phi(x, t) \to A(t) & \text{für} \quad x \to 0 \\ \Phi(x, t) \to B(t) & \text{für} \quad x \to c \end{cases} \quad \text{bei} \quad t > 0.$$

Der stetige Anschluß an die Randwerte wird, wie das auch dem physialischen Problem entspricht, bei senkrechter Annäherung an die Ränder efordert. In den Eckpunkten $x = 0$, $t = 0$ und $x = c$, $t = 0$ wird dememäß keine Randbedingung gestellt[4a]); daher braucht nicht $\Phi(0) = A(0)$ nd $\Phi(c) = B(0)$ zu sein.)

Lösungen dieser Randwertaufgabe sind seit Fourier von vielen orschern (vor allem Poisson, Riemann, Schläfli, Lamé, Lord Kelvin, eltrami, Poincaré) nach verschiedenen außerordentlich geistreichen ethoden gegeben worden, die meist durch die physikalische Interpretation es Problems nahegelegt werden und vielfach der mathematischen Strenge ntbehren. Der folgende Weg erreicht die Integration auf die methodisch

[4a]) Anm. bei der Korrektur: Vgl. den inzwischen (10. Sept. 1924) erschienenen rtikel von Hilb und Szász, Allgemeine Reihenentwicklungen. Encyklopädie II 3, eft 8, § 6: Auftreten der Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik, wo S. 1245) für den dreidimensionalen Fall auf eine ähnliche Formulierung der Beingungen hingewiesen wird, mit dem Zusatz: „Gerade diese der Natur des Problems ngepaßte Fragestellung ist bisher in der Literatur verhältnismäßig wenig behandelt".

wohl einfachste Weise ohne Zuhilfenahme physikalischer Vorstellungen und besitzt zugleich eine offenkundige Erweiterungsfähigkeit auf sehr viel allgemeinere Probleme. Er beruht auf der fundamentalen Eigenschaft der Laplace-Transformation, daß der *Differentiation* im Oberbereich die *Multiplikation mit der Variablen* im Unterbereich entspricht, genauer[5]:

Existiert eine Funktion $F(t)$ mit ihren $\nu - 1$ ersten Ableitungen $(\nu \geqq 1)$ für $t \geqq 0$, ist $F^{(\nu-1)}$ bei $t = 0$ stetig und die ν-te Ableitung $F^{(\nu)}$ für $t > 0$ vorhanden und eine Oberfunktion, so ist auch F eine solche, und für die Unterfunktionen gilt die Beziehung:

$$(3) \quad L(F^{(\nu)}) = s^{\nu} L(F) - \{F(0)s^{\nu-1} + F'(0)s^{\nu-2} + \ldots + F^{(\nu-2)}(0)s + F^{(\nu-1)}(0)\}.$$

Diese Wirkung der Laplace-Transformation kann dazu ausgenutzt werden, die Ableitungen zu entfernen; man kann so z. B. lineare totale Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in lineare Gleichungen und solche mit rationalen Koeffizienten und außerwesentlichen Singularitäten in Differentialgleichungen niedrigerer Ordnung transformieren, wie an anderer Stelle gezeigt werden wird. Im Falle unserer partiellen Differentialgleichung, wo wir es mit Ableitungen nach zwei Variablen x und t zu tun haben, wollen wir die Variable t, die das Intervall $0 < t < \infty$ durchläuft, als diejenige, auf die sich die Laplace-Transformation erstreckt, und x als Parameter auffassen. Setzen wir voraus, daß $\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t}$ eine Unterfunktion besitzt, so hat auch $\Phi(x,t)$ eine solche — sie heiße $\varphi(x,s)$ —, und wegen des stetigen Anschlusses von $\Phi(x,t)$ an $\Phi(x)$ für $t \to 0$ folgt, wenn man Gleichung (1) der Laplace-Transformation unterwirft:

$$(1') \quad \frac{\partial^2 \varphi(x,s)}{\partial x^2} = s\varphi(x,s) - \Phi(x).$$

Dabei muß allerdings angenommen werden, daß die Differentiation nach x mit der Funktionaloperation, d. h. mit dem Laplaceschen Integral, vertauschbar ist, man hat sich also m. a. W. bei den Lösungen der Gleichung (1) nicht nur auf die Oberfunktionen, sondern sogar weiterhin auf diejenigen zu beschränken, die jene Annahme rechtfertigen. Es wird sich aber später ergeben, daß der analytische Ausdruck der Lösung sowohl von diesen als auch noch einigen weiteren Einschränkungen unabhängig ist, daß also die Lösung von dem engeren Funktionsbereich in den allgemeinsten in Frage kommenden „fortsetzbar" ist[6].

---

[5]) Doetsch, l. c. [2]), S. 198, Satz III.

[6]) Vgl. eine analoge Bemerkung hinsichtlich der Lösungen von Integralgleichungen bei Doetsch, l. c. [2]), S. 201 u. 205.

Wir haben statt der partiellen Differentialgleichung eine totale mit r Variablen x und dem Parameter s erhalten. Von den Randbe-ngungen (2) ist (2a) in der neuen Differentialgleichung aufgegangen, b) verwandelt sich in

$$\varphi(x, s) \to a(s) = L(A) \quad \text{für} \quad x \to 0,$$
$$\varphi(x, s) \to b(s) = L(B) \quad \text{für} \quad x \to c,$$

rausgesetzt, daß A und B zum Bereich der Oberfunktionen gehören und ß die Grenzwerte der Unterfunktion φ von Φ die Unterfunktionen a, b r Grenzwerte A, B von Φ sind (gerade in einem späterhin sehr wich-gen Falle wird dies nicht zutreffen). Jedoch wird diese einschränkende raussetzung ebenso wie die früheren im Endresultat keine Rolle mehr ielen.

Unser Problem drückt sich also im Unterbereich außerordentlich ein-ch aus: Integration einer linearen totalen Differentialgleichung zweiter rdnung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = s\varphi - \Phi(x)$$

it den Randbedingungen $\varphi(0) = a$, $\varphi(c) = b$. Dies wird aber so erledigt, ß man erst die homogene und dann die inhomogene Gleichung löst, und kommt man ganz naturgemäß auf den Weg, den auch die früheren utoren stets eingeschlagen haben: das Problem in Teilprobleme zu zer-gen, indem man die Temperatur auf einzelnen Rändern konstant gleich 0 rschreibt, und dann die Teillösungen zu superponieren. In der ersten d zweiten Mitteilung wird die homogene Gleichung behandelt, d. h. wir tzen $\Phi(x) \equiv 0$ voraus.

§ 3.

Herleitung der klassischen Lösung im Falle verschwindender Anfangstemperatur.

Im homogenen Fall $\Phi(x) \equiv 0$ hat die Differentialgleichung (1′) ein ndamentalsystem von partikulären Lösungen

$$\varphi_0(x, s) = \frac{e^{(c-x)\sqrt{s}} - e^{-(c-x)\sqrt{s}}}{e^{c\sqrt{s}} - e^{-c\sqrt{s}}} = \frac{\sin(c-x)\sqrt{-s}}{\sin c\sqrt{-s}},$$

$$\varphi_1(x, s) = \frac{e^{x\sqrt{s}} - e^{-x\sqrt{s}}}{e^{c\sqrt{s}} - e^{-c\sqrt{s}}} = \frac{\sin x\sqrt{-s}}{\sin c\sqrt{-s}},$$

e die Randbedingungen erfüllen:

$$\varphi_0(0, s) = 1, \qquad \varphi_0(c, s) = 0;$$
$$\varphi_1(0, s) = 0, \qquad \varphi_1(c, s) = 1.$$

Die Lösung, die den Randbedingungen (2′) genügt, lautet daher:

$$\varphi(x, s) = a(s)\varphi_0(x, s) + b(s)\varphi_1(x, s).$$

Um das Integral der Gleichung (1) mit den Randbedingungen (2) im Oberbereich zu bekommen, hat man nun zu φ nur die entsprechende Oberfunktion Φ zu bestimmen, die differenzierbar, also stetig sein muß, weshalb von den unendlich vielen Oberfunktionen höchstens eine in Frage kommt (vgl. die Bemerkung S. 286). Wir können sie sofort explizit hinschreiben, wenn wir folgenden Satz[7]) anwenden:

Haben $f_1(s)$ und $f_2(s)$ die Oberfunktionen $F_1(t)$ und $F_2(t)$, so hat $f_1 \cdot f_2$ zur Oberfunktion das Faltungsintegral

$$F_1 * F_2 = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau)\, d\tau, \tag{4}$$

bis auf eine Nullfunktion ($F_1 * F_2$ ist stetig[8])).

Zu φ_0 und φ_1 kann man nämlich die Oberfunktionen angeben. Die Thetafunktion

$$\vartheta_3(v, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{2mi\pi v - m^2\pi^2 t}, \tag{5}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(v+m)^2}{t}}}{\sqrt{\pi t}} \tag{5a}$$

(die in der Schwarzschen Bezeichnungsweise $\vartheta_3(v, i\pi t)$ heißen würde) besitzt die Unterfunktion[9])

$$f_3(v, s) = -\frac{\cos(2v-1)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s}\,\sin\sqrt{-s}},$$

solange v dem Bereiche $0 \leqq v \leqq 1$ angehört. Daher ist

$$\frac{\partial f_3(v, c^2 s)}{\partial v} = -2\,\frac{\sin(-2v+1)\,c\sqrt{-s}}{\sin c\sqrt{-s}} \quad \text{für} \quad 0 \leqq v \leqq 1$$

und somit

$$\varphi_0(x, s) = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_3(v, c^2 s)}{\partial v}\right]_{v=\frac{x}{2c}} \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 2c,$$

$$\varphi_1(x, s) = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_3(v, c^2 s)}{\partial v}\right]_{v=\frac{c-x}{2c}} \quad \text{für} \quad -c \leqq x \leqq c.$$

---

[7]) Doetsch, l. c. [2]), S. 198, Satz I.
[8]) Doetsch, l. c. [2]), S. 194.
[9]) Doetsch, l. c. [3]), S. 21.

m aus diesen Formeln auf die Oberfunktionen schließen zu können, raucht man nur zu bemerken, daß wegen

$$\int_0^\infty e^{-c^2 s} F(t)\,dt = \frac{1}{c^2}\int_0^\infty e^{-s t} F\left(\frac{t}{c^2}\right) dt$$

em Übergang von $f(s)$ zu $f(c^2 s)$ im Unterbereich der Übergang von (t) zu $\frac{1}{c^2} F\left(\frac{1}{c^2}\right)$ im Oberbereich und daß weiterhin im vorliegenden Fall, ie man leicht verifiziert, die Differentiation nach v im Unterbereich dem- lben Prozeß im Oberbereich entspricht, m. a. W. daß die Ableitung nach mit dem Laplace-Integral vertauschbar ist, wenigstens im *Innern*[10]) es Intervalls $0 < v < 1$. Man findet

$$L^{-1}\{\varphi_0(x,s)\} = -\frac{1}{2c^2}\left[\frac{\partial \vartheta_3\left(v, \frac{t}{c^2}\right)}{\partial v}\right]_{v=\frac{x}{2c}} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{x}{2c}, \frac{t}{c^2}\right)}{\partial x}$$

für $0 < x < 2c$,

$$L^{-1}\{\varphi_1(x,s)\} = -\frac{1}{2c^2}\left[\frac{\partial \vartheta_3\left(v, \frac{t}{c^2}\right)}{\partial v}\right]_{v=\frac{c-x}{2c}} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{c-x}{2c}, \frac{t}{c^2}\right)}{\partial x}$$

für $-c < x < c$,

nd daher ergibt sich unter Verwendung des S. 290 zitierten Satzes zu (x, s) die Oberfunktion

$$6)\quad \Phi(x,t) = -\frac{1}{c}A(t) * \frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{x}{2c}, \frac{t}{c^2}\right)}{\partial x} + \frac{1}{c}B(t) * \frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{c-x}{2c}, \frac{t}{c^2}\right)}{\partial x}$$

für $0 < x < c$.

Wird die Streckeneinheit gleich der Stablänge c genommen, so gewinnt ieser Ausdruck die übersichtlichere Gestalt:

$$6a)\quad \Phi(x,t) = -A(t) * \frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, t\right)}{\partial x} + B(t) * \frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{1-x}{2}, t\right)}{\partial x} \quad \text{für } 0 < x < 1.$$

chreibt man die Faltungen und die Reihen explizit hin, so stimmt (6) it der von Riemann und Anderen gegebenen Lösung überein.

---

[10]) An den Enden ist dies sicher nicht der Fall, denn für $v = 0$ und $v = 1$ ist $\frac{\partial}{\partial v}\vartheta_3(v,t) = -\sum_{m=1}^{\infty} 4m\pi \sin 2m\pi v \cdot e^{-m^2\pi^2 t}$ gleich 0, die Unterfunktion also ebenfalls, ährend $\frac{\partial}{\partial v} f_3(v,s) = 2\,\frac{\sin(2v-1)\sqrt{-s}}{\sin\sqrt{-s}}$ gleich -2, bzw. 2 ist.

Die Funktion

$$G(x,t) = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{x}{2c}, \frac{t}{c^2}\right)}{\partial x}$$

ist als die *Greensche Funktion* unseres Problems zu bezeichnen. Mit ihrer Hilfe läßt sich $\Phi(x,t)$ folgendermaßen bilden:

$$\Phi(x,t) = A(t) * G(x,t) + B(t) * G(c-x,t).$$

Daß dieser Ausdruck eine Lösung darstellt, ist bisher nur sichergestellt unter der Annahme, daß es überhaupt eine Lösung gibt und daß alle die Bedingungen, die bei der Herleitung benutzt wurden, erfüllt sind. In der II. Mitteilung wird diskutiert werden, ob $\Phi(x,t)$ auch unabhängig von diesen Bedingungen eine Lösung darstellt und ob es die einzige ist.

(Eingegangen am 22. Juli 1924.)

Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung.

II. Mitteilung.

er lineare Wärmeleiter mit verschwindender Anfangstemperatur. Die allgemeinste Lösung und die Frage der Eindeutigkeit.

Von

Gustav Doetsch in Stuttgart.

---

§ 1.

erifikation der klassischen Lösung unter allgemeinsten Bedingungen.

In der ersten Mitteilung[1]) wurde die klassische Lösung der Differential-eichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

it den Randbedingungen

$$\Phi(x,t) \to 0 \text{ für } t \to 0; \quad \to A(t) \text{ für } x \to 0, \quad \to B(t) \text{ für } x \to c$$

nter gewissen Annahmen auf neuem Wege hergeleitet. Um zu zeigen, aß der Ausdruck

$$\Phi(x,t) = A(t) * G(x,t) + B(t) * G(c-x,t)$$

it der „Greenschen Funktion"

$$G(x,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{x}{2c}, \frac{t}{c^2}\right)}{\partial x}$$

ıch ohne diese Annahmen eine Lösung des Problems darstellt, brauchen ir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Die Funktion $G(x,t)$ strebt bei festem $t > 0$ für $\to 0$ und $x \to c$ gegen 0; ebenso strebt sie bei festem x $(0 < x < c)$ ir $t \to 0$ gegen 0.*

---

[1]) Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 285–292. Im Folgenden mit M. I zitiert.

Beweis. Es genügt, $c = 1$ zu nehmen. Dann ist nach M. I Formel (5)

$$G(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{mi\pi x - m^2\pi^2 t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{1 + 2\sum_{1}^{\infty} e^{-m^2\pi^2 t}\cos m\pi x\right\}$$

$$= 2\pi\sum_{1}^{\infty} m e^{-m^2\pi^2 t}\sin m\pi x.$$

Diese Reihe ist bei festem $t > 0$ gleichmäßig in x konvergent, und da für $x \to 0$ und $x \to 1$ jedes einzelne Glied gegen 0 strebt, so strebt die Reihe selbst auch gegen 0, übrigens sogar gleichmäßig in t für $t \geqq t_0 > 0$.

Ferner ist nach M. I Formel (5a)

$$G(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(x+2m)^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}\sum_{-\infty}^{+\infty}(x+2m)\,e^{-\frac{(x+2m)^2}{4t}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}\sum_{-\infty}^{+\infty}(x+2m)\,e^{-\frac{mx+m^2}{t}}.$$

Die hier vorkommende Reihe konvergiert gleichmäßig für $0 < t \leqq t_0$, und das allgemeine Glied mit einem Index $m \neq 0$ strebt für $t \to 0$ gegen 0. Infolgedessen nähert sich die Reihe dem Werte x und die Funktion $G(x,t)$ für $x > 0$ dem Werte 0.

Hilfssatz 2. *Die Funktion $F_1(t)$ sei bei $t = 0$ nach rechts stetig; ihre Ableitung $F_1'(t)$ sowie eine weitere Funktion $F_2(t)$ sollen für $0 < t \leqq t_0$ existieren und bis zum Nullpunkt uneigentlich absolut integrabel sein; ist $F_1(0) \neq 0$, so sei außerdem $F_2(t)$ für $0 < t \leqq t_0$ stetig. Dann ist die Faltungsfunktion*

$$\Phi(t) = \int_0^t F_1(\tau)\,F_2(t-\tau)\,d\tau$$

für $0 < t < t_0$ differenzierbar, und zwar ist

$$\Phi'(t) = \int_0^t F_1'(\tau)\,F_2(t-\tau)\,d\tau + F_1(0)\,F_2(t),$$

also stetig.

Beweis[2]). Unter unseren Voraussetzungen ist

$$\Phi(t) = \int_0^t F_2(t-\tau)\left\{\int_0^\tau F_1'(x)\,dx + F_1(0)\right\}d\tau.$$

---

[2]) Vgl. den Spezialfall: „$F_2(t) = t^{-\lambda}$ $(\lambda < 1)$, $F_1(0) = 0$ und $F_1'(t)$ stetig" dieses Satzes bei Bôcher: An introduction to the study of integral equations Cambridge tracts Nr. 10, 1909, S. 5.

Ist die stetige Differenzierbarkeit von Φ schon erwiesen, so findet man übrigen den Wert von Φ' unter unseren allgemeinen Voraussetzungen sehr leicht vermitte

a F_1' und F_2 an den Stellen der uneigentlichen Integrabilität absolut tegrabel sind, so kann man das iterierte Integral in ein Doppelintegral ber das Dreieck $0 \leqq x \leqq \tau \leqq t$ verwandeln und dieses dann vermöge der oordinatentransformation

$$\tau = t - y + z$$
$$x = z$$

erführen in das Doppelintegral

$$\iint F_1'(z) F_2(y-z)\, dy\, dz,$$

streckt über das Dreieck $0 \leqq z \leqq y \leqq t$. Dieses kann wiederum als eriertes Integral geschrieben werden und man erhält:

$$\Phi(t) = \int_0^t \left\{ \int_0^y F_1'(z) F_2(y-z)\, dz \right\} dy + F_1(0) \int_0^t F_2(\tau)\, d\tau.$$

ier kommt t nur noch in der oberen Integralgrenze vor, und wegen der etigkeit der Integranden ergibt sich beim Differenzieren:

$$\Phi'(t) = \int_0^t F_1'(z) F_2(t-z)\, dz + F_1(0) F_2(t).$$

t $F_1(0) = 0$, so fehlt das letzte Glied, und unser Resultat folgt auch ne die Voraussetzung der Stetigkeit von $F_2(t)$.

Nunmehr sind wir in der Lage zu zeigen, daß der Ausdruck für (x, t) *unter sehr weiten Voraussetzungen*, die im Wesentlichen nicht el mehr als die Existenz der vorkommenden Integrale verlangen, der fferentialgleichung genügt und die vorgeschriebenen Randbedingungen füllt. Dies wird in den mir bekannten Darstellungen zwar als richtig terstellt, jedoch ohne Präzisierung der (wohl spezieller als im Folgenden

---

r Laplace-Transformation: Man lege den in Frage kommenden Funktionen für $> t_0$ den Wert 0 bei. Dann besitzen sie sämtlich Unterfunktionen, und es ist (vgl. I, Satz bei Formel (4)):

$$L(\Phi) = L(F_1)\, L(F_2),$$

thin

$$s\, L(\Phi) = \{ s\, L(F_1) - F_1(0) \}\, L(F_2) + F_1(0)\, L(F_2).$$

a wegen der Stetigkeit und daher Beschränktheit von F_1 offenbar $\Phi(t) \to 0$ für $\to 0$, so folgt aus M. I, Formel (3):

$$L(\Phi') = L(F_1')\, L(F_2) + F_1(0)\, L(F_2),$$

so

$$\Phi' = F_1' * F_2 + F_1(0)\, F_2 + \text{Nullfunktion}.$$

egen der Stetigkeit von $F_1' * F_2$ verschwindet für $F_1(0) = 0$ oder für stetiges F_2 ese Nullfunktion identisch.

gedachten) Voraussetzungen und ohne zureichende Beweise[3]). Der Satz den wir hier beweisen wollen, lautet:

$A(t)$ und $B(t)$ seien für $t>0$ definiert und in jedem endlichen Intervall integrabel; ihr bis zum Nullpunkt erstrecktes uneigentliches Integral konvergiere absolut. Dann gilt Folgendes:

a) *Die Funktion $\Phi(x,t)=A(t)*G(x,t)+B(t)*G(c-x,t)$ genügt im Bereiche $0<x<c$, $t>0$ der Differentialgleichung $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}$*

b) *Bei festem x $(0<x<c)$ ist $\Phi(x,t)\to 0$ für $t\to 0$.*

c) *An jeder Stetigkeitsstelle[4]) $t_0>0$ von $A(t)$ ist $\Phi(x,t_0)\to A(t_0)$ für $x\to 0$, an jeder Stetigkeitsstelle $t_1>0$ von $B(t)$ ist $\Phi(x,t_1)\to B(t_1)$ für $x\to c$.*

Es genügt, $c=1$ zu nehmen und sich auf die Betrachtung des ersten Bestandteils $\Phi_0(x,t)=A(t)*G(x,t)=-A(t)*\frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{x}{2},t\right)}{\partial x}$ von $\Phi(x,t)$ zu beschränken.

ad a): In dem Ausdruck $\Phi_0(x,t)=\int_0^t A(t-\tau)\,G(x,\tau)\,d\tau$ darf im Intervall $0<x<1$ nach dem Parameter x unter dem Integralzeichen differenziert werden. Denn ist τ_0 ein Wert zwischen 0 und t, so erhält man:

$$\frac{\Phi_0(x+\Delta x,t)-\Phi_0(x,t)}{\Delta x}=\int_0^{\tau_0}A(t-\tau)\,\frac{G(x+\Delta x,\tau)-G(x,\tau)}{\Delta x}\,d\tau$$

$$+\int_{\tau_0}^{t}A(t-\tau)\,\frac{G(x+\Delta x,\tau)-G(x,\tau)}{\Delta x}\,d\tau$$

$$=\int_0^{\tau_0}A(t-\tau)\,\frac{\partial G(x+\vartheta\Delta x,\tau)}{\partial x}\,d\tau+\int_{\tau_0}^{t}A(t-\tau)\,\frac{\partial G(x+\vartheta\Delta x,\tau)}{\partial x}\,d\tau,$$

wo ϑ eine (noch von τ abhängige) Zahl zwischen 0 und 1 ist. Nun überzeugt man sich aber leicht, daß $\frac{\partial G(\xi,\tau)}{\partial\xi}$ bei $0<\xi_1\leqq\xi\leqq\xi_2<1$ einerseits für $\tau\to 0$ gleichmäßig in ξ gegen 0 strebt, also beschränkt, andererseits an der Stelle ξ stetig ist und zwar gleichmäßig in τ in dem Intervall $0<\tau_0\leqq\tau\leqq t$. Man kann also zunächst τ_0 so klein wählen, daß das erste Integral beliebig klein wird, und dann Δx auf einen so kleinen Spielraum beschränken, daß das zweite Integral sich von $\int_{\tau_0}^{t}A(t-\tau)\,G'(x,\tau)\,d$

---

[3]) Vgl. z. B. Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik 2, 4. Aufl. 1901, S. 114–118, wo ein Beweis für unsere folgenden Behauptungen a) und b) überhaupt nicht, für c) nur in unzulänglicher Weise erbracht wird.

[4]) Es genügt Stetigkeit nach links.

liebig wenig unterscheidet. Damit ist bewiesen, daß unser Differenzenquotient r $\Delta x \to 0$ gegen $\int_0^t A(t-\tau)\frac{\partial G(x,\tau)}{\partial x}d\tau$ strebt. Analog beweist man die aber-alige Differenzierbarkeit. Es ist also einerseits

$$\frac{\partial^2 \Phi_0(x,t)}{\partial x^2} = \int_0^t A(t-\tau)\frac{\partial^2 G(x,\tau)}{\partial x^2}d\tau,$$

dererseits nach Hilfssatz 2, wenn man berücksichtigt, daß nach Hilfssatz 1 $(x, 0) = 0$ zu setzen ist,

$$\frac{\partial \Phi_0(x,t)}{\partial t} = \int_0^t A(t-\tau)\frac{\partial G(x,\tau)}{\partial \tau}d\tau.$$

un genügt aber nach einer bekannten Eigenschaft der Thetafunktionen die Funk-on $\vartheta_3(v,t)$ in unserer Normierung mit allen ihren Ableitungen der Differential-eichung

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 \vartheta_3(v,t)}{\partial v^2} = \frac{\partial \vartheta_3(v,t)}{\partial t},$$

lglich die Funktion $G(x,t) = -\frac{\partial \vartheta_3\left(\frac{x}{2},t\right)}{\partial x}$ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial G(x,t)}{\partial t},$$

omit für $\Phi_0(x,t)$ das Bestehen der Differentialgleichung (1) nachgewiesen ist.

ad b): Der Beweis ergibt sich einfach aus der entsprechenden Tatsache für (x,t) (s. Hilfssatz 1).

ad c): Verwenden wir die aus (5a) entspringende Form von $G(x,t)$, so ist

$$(x,t_0) = \int_0^{t_0} A(t_0-\tau)\frac{1}{2\sqrt{\pi}\tau^{\frac{3}{2}}}\sum_{-\infty}^{+\infty}(x+2m)\,e^{-\frac{(x+2m)^2}{4\tau}}d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t_0} A(t_0-\tau)\,e^{-\frac{x^2}{4\tau}}\frac{x\,d\tau}{4\tau^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{t_0} A(t_0-\tau)\sum_1^{\infty}\frac{(2m+x)\,e^{-\frac{(2m+x)^2}{4\tau}} - (2m-x)\,e^{-\frac{(2m-x)^2}{4\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}d\tau.$$

as erste Integral geht durch die Substitution

$$\sigma = \frac{x}{2\sqrt{\tau}}, \qquad d\sigma = -\frac{x}{4\tau^{\frac{3}{2}}}d\tau$$

er in

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t_0}}}^{\infty} A\left(t_0-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right)e^{-\sigma^2}d\sigma,$$

as sich wegen $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\sigma^2}d\sigma = 1$ so schreiben läßt:

$$A(t_0) - A(t_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t_0}}} e^{-\sigma^2}\,d\sigma + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t_0}}}^{\frac{x}{2\sqrt{t_0\mu}}} \left\{A\left(t_0 - \frac{x^2}{4\sigma^2}\right) - A(t_0)\right\} e^{-\sigma^2}\,d\sigma$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t_0\mu}}}^{\infty} \left\{A\left(t_0 - \frac{x^2}{4\sigma^2}\right) - A(t_0)\right\} e^{-\sigma^2}\,d\sigma = A(t_0) + J_1 + J_2 + J_3.$$

Hierbei sei $0 < \mu < 1$. In J_3 ist $t_0(1-\mu^2) \leqq t_0 - \frac{x^2}{4\sigma^2} \leqq t_0$. Wegen der Stetigkeit von $A(t)$ bei t_0 (nach links) kann man daher μ so nahe an 0 wählen, daß die Differenz in $\{\}$ absolut kleiner als eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$ ist. Dann wird

$$|J_3| < \frac{2}{\sqrt{\pi}}\varepsilon\int_0^{\infty} e^{-\sigma^2}\,d\sigma = \varepsilon.$$

Nunmehr kann man x auf eine so kleine Nachbarschaft von 0 einschränken, daß auch

$$|J_1| < \varepsilon, \qquad |J_2| < \varepsilon$$

ist, woraus folgt, daß das erste Integral in dem Ausdruck für Φ_0 bei $x \to 0$ gegen $A(t_0)$ strebt. Wir behaupten weiterhin, daß das zweite dabei verschwindet. Die in ihm vorkommende Reihe konvergiert gleichmäßig für $0 < \tau \leqq t_0$ und $0 \leqq x \leqq 1$. Für $x \to 0$ streben die einzelnen Glieder gegen 0, also strebt auch der Summenwert gleichmäßig in τ gegen 0, folglich auch das Integral.

Um den Grenzübergang $x \to 1$ durchzuführen, schreiben wir $\Phi_0(x,t)$ in der Form

$$\Phi_0(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t A(t-\tau)\frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}}\left\{\sum_0^{\infty}(2m+x)\,e^{-\frac{(2m+x)^2}{4\tau}} - \sum_1^{\infty}(2m-x)\,e^{-\frac{(2m-x)^2}{4\tau}}\right\}d\tau$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t A(t-\tau)\sum_0^{\infty}\frac{(2m+x)\,e^{-\frac{(2m+x)^2}{4\tau}} - (2m+2-x)\,e^{-\frac{(2m+2-x)^2}{4\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}\,d\tau.$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig für $0 < \tau \leqq t$ und $0 \leqq x \leqq 1$, für $x \to 1$ streben die Glieder gegen 0, folglich nähert sich der Summenwert gleichmäßig in τ dem Werte 0 und damit auch das Integral.

§ 2.

Ein- oder Vieldeutigkeit der Lösung.

Sind bei der unserer partiellen Differentialgleichung entsprechenden totalen Differentialgleichung im Unterbereich (vgl. M. I S. 289) die Randwerte $a(s)$ und $b(s)$ Konstante, sagen wir $a(s) = 1$, $b(s) = 0$, so ist die Lösung im Unterbereich $\varphi(x,s) = \varphi_0(x,s)$, und bei der Transformation in den Oberbereich tritt keine Faltung auf, sondern es ergibt sich einfach $\Phi(x,t) = G(x,t)$. Dieser Fall kann allerdings, wenn $a(s)$ und

s) als Unterfunktionen aus $A(t)$ und $B(t)$ entstanden gedacht werden, cht eintreten, denn die Konstante 1 ist keine Unterfunktion. Trotzdem mmt ihm eine fundamentale Bedeutung zu. Schon S. 297 wurde be-erkt, daß $G(x,t)$ der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ genügt, und aus ilfssatz 1 folgt, daß die Funktion bei normaler Annäherung gegen die änder des Bereichs $0 < x < c$, $t > 0$ gegen 0 strebt. $G(x,t)$ stellt so eine *Lösung* unseres Problems dar, wenn *auf allen Begrenzungen die andwerte* 0 vorgeschrieben sind. Die Tatsache einer solchen nicht iden-sch verschwindenden Lösungsfunktion *vernichtet* offenbar die *Eindeutig-it* der Lösung des allgemeinen Problems, denn mit $\Phi(x,t)$ genügt auch $(x,t) + cG(x,t)$ unseren Bedingungen. Dies steht in Gegensatz zu n Beweisen der Lehrbücher über die Theorie der Wärmeleitung[5]), daß e Lösung eindeutig sei, d. h. daß eine Funktion Φ, die unserer Gleichung nügt und überall den Randwerten 0 zustrebt, identisch verschwindet. nterzieht man nun diese Beweise einer Kritik, so bemerkt man, daß i ihnen eine nicht formulierte Voraussetzung benutzt wird. Es wird wa so geschlossen: Man betrachte das Integral

$$J(t) = \int_0^c \frac{\Phi^2(x,t)}{2}\, dx.$$

ann ist

$$\frac{dJ}{dt} = \int_0^c \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial t}\, dx = \int_0^c \Phi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\, dx = \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_0^c - \int_0^c \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 dx,$$

obei $\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_0^c$ die Differenz der Werte bedeutet, denen $\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ für $x \to c$ nd $x \to 0$ zustrebt. Bleibt $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ bei diesem Grenzübergang beschränkt, sind diese Werte wegen der vorausgesetzten Randbedingungen gleich 0. s folgt also:

$$\frac{dJ}{dt} = -\int_0^c \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 dx \leqq 0.$$

un sagt man weiter: Hieraus würde, weil wegen der auf den Rand $t = 0$ züglichen Bedingung der Wert $J(0) = 0$ ist, folgen: $J(t) \leqq 0$, während ch nach Definition $J(t) \geqq 0$ ist. Also muß $J(t) = 0$, d. h. $\Phi \equiv 0$ sein. ieser Beweis ist nicht stichhaltig; denn um aus $\frac{dJ}{dt} \leqq 0$ auf $J(t) \leqq J(0)$

[5]) Vgl. z. B. Poincaré, Théorie analytique de la propagation de la chaleur, ris 1895, S. 27–30; Riemann-Weber, l. c. [3]), S. 86–88; Bieberbach, Theorie r Differentialgleichungen, Berlin 1923, S. 313.

schließen zu können, muß für $J(0)$ der Wert genommen werden, dem $J(t)$ für $t \to 0$ zustrebt. Aus der Tatsache, daß $\Phi(x,t)$ für $t \to 0$ bei festem x sich dem Werte 0 nähert, folgt aber nicht, daß $J(t) = \int_0^c \frac{\Phi^2(x,t)}{2} dx$ für $t \to 0$ gegen 0 strebt. In der Tat ist dies für unsere Lösung $G(x,t)$ nicht der Fall; denn nehmen wir $c = 1$, so folgt für $t > 0$:

$$\int_0^1 \frac{G^2(x,t)}{2} dx = 2\pi^2 \int_0^1 \left\{ \sum_1^\infty m e^{-m^2\pi^2 t} \sin m\pi x \right\}^2 dx$$

$$= 2\pi^2 \sum_{m,n=1}^\infty mn e^{-(m^2+n^2)\pi^2 t} \int_0^1 \sin m\pi x \sin n\pi x \, dx,$$

oder wegen

$$2\int_0^1 \sin m\pi x \sin n\pi x \, dx = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{für } m \neq n, \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{G^2(x,t)}{2} dx = \pi^2 \sum_{m=1}^\infty m^2 e^{-2m^2\pi^2 t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \vartheta_3(0, 2t)}{\partial t}.$$

Dieser Ausdruck strebt für $t \to 0$ gegen $+\infty$. — Würde man, wie das der Natur des mit unserer Differentialgleichung verknüpften physikalischen Problems gemäß ist, voraussetzen, daß $\Phi(x,t)$ sich *gleichmäßig in* x für $t \to 0$ dem Werte 0 nähert, so wäre der obige Schluß richtig. Die Funktion $G(x,t)$ erfüllt diese Bedingung nicht.

Es ist auch sehr leicht, ein *Beispiel* anzugeben, wo die Annahme der Eindeutigkeit der Lösung in der klassischen Form zu einem falschen Resultat führt. Die Funktion $\psi(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ genügt für $x > 0$, $t > 0$ der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$, bei festem $x > 0$ nähert sie sich für $t \to 0$ dem Werte 0, bei festem $t > 0$ für $x \to 0$ dem Werte 0, für $x \to 1$ dem Werte $\psi(1,t)$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung würde für $0 < x < 1$, $t > 0$ folgen:

$$\psi(x,t) = 0 * G(x,t) + \psi(1,t) * G(1-x,t) = \psi(1,t) * G(1-x,t).$$

Da für $x > 0$ aber $L(\psi(x,t)) = e^{-x\sqrt{s}}$ ist[6]), so ergibt der Übergang in den Unterbereich, daß die Gleichung

$$\psi(x,t) = G(x,t) + \psi(1,t) * G(1-x,t)$$

besteht.

[6]) Bernstein und Doetsch, Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion. Dritte Note, Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl. 1922, S. 32–46 [S. 44–46].

Dieselbe Eigenschaft wie $G(x, t)$ haben auch *sämtliche Ableitungen* eser Funktion nach t:

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial t^2}, \ldots .$$

enn sie genügen offensichtlich unserer Differentialgleichung und nähern ch, wie man analog zu Hilfssatz 1 beweist, überall den Randwerten 0. Vegen der analogen Eigenschaft der Thetafunktion ist keine von diesen ösungen über den Rand $t = 0$ hinüber analytisch fortsetzbar, was übrigens ıch daraus hervorgeht, daß bei $0 < x < c$ sämtliche (im Reellen gebil-ɛten) Ableitungen nach t von $G(x, t)$ an der Stelle $t = 0$ verschwinden, ıne daß die Funktion identisch verschwindet.

In der Nähe des Punktes $x = 0$, $t = 0$ zeigen diese *„singulären" ösungen* ein besonders kompliziertes Verhalten, was sich darin aus-ɔricht, daß sie dort beliebig großer und beliebig kleiner Werte fähig nd. Denn offenbar verhält sich in dieser Ecke des Gebietes (wenn $c = 1$)

$$G(x, t) \quad \text{wie} \quad \frac{x e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi}\, t^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial t} \quad \text{wie} \quad \frac{x(x^2 - 6t) e^{-\frac{x^2}{4t}}}{8\sqrt{\pi}\, t^{\frac{7}{2}}} \quad \text{usw.}$$

Wir können den singulären Lösungen $G, \frac{\partial G}{\partial t}, \ldots$ auch eine *physika-sche Bedeutung* beilegen. Wird an das Ende $x = 0$ die Temperatur (t), an $x = 1$ die konstante Temperatur 0 angelegt, so ist für $0 < x < 1$, > 0 die Temperatur gegeben durch

$$\Phi(x, t) = A(t) * G(x, t) = \int_0^t A(\tau)\, G(x, t - \tau)\, d\tau.$$

Wird aber das Ende $x = 0$ nur während einer kurzen Zeitspanne t_0 er-ärmt $(A(t) \geqq 0)$ und dann auf der konstanten Temperatur 0 gehalten, h. ist $A(t) = 0$ für $t > t_0 > 0$, so ist $(0 \leqq \vartheta \leqq 1)$:

$$\Phi(x, t) = \int_0^{t_0} A(\tau)\, G(x, t - \tau)\, d\tau = G(x, t - \vartheta t_0) \int_0^{t_0} A(\tau)\, d\tau.$$

ehmen wir nun an, daß die Zeitspanne t_0 immer kleiner, die angelegte emperatur A aber immer größer wird, derart, daß die gesamte aufge-endete Wärmemenge $\int_0^{t_0} A(\tau)\, d\tau$ dieselbe, sagen wir gleich 1, bleibt, so ird der Wärmezustand $\Phi(x, t)$ der Grenze $G(x, t)$ zustreben. $G(x, t)$

ist also die Temperaturverteilung, die sich herausstellt, wenn die Wärmemenge 1 dem Ende $x = 0$ in verschwindend kurzer Zeit mitgeteilt wird [7]).

Um auch $\frac{\partial G}{\partial t}$ zu deuten, formen wir $\Phi(x, t)$ durch (verallgemeinerte) partielle Integration um:

$$\Phi(x,t) = \int_0^\tau A(z)\,dz \cdot G(x, t-\tau)\Big|_0^t - \int_0^t\int_0^\tau A(z)\,dz \cdot \frac{\partial G(x, t-\tau)}{\partial \tau}\,d\tau$$

$$= \int_0^t\int_0^\tau A(z)\,dz \left[\frac{\partial G(x,\tau)}{d\tau}\right]_{t-\tau} d\tau.$$

Wird nun jetzt die Zeitspanne t_0, innerhalb deren $\int_0^\tau A(z)\,dz \not\equiv 0$ ist, immer kleiner, dabei aber $|A(t)|$ immer größer derart, daß $\int_0^{t_0}\int_0^\tau A(z)\,dz\,d\tau$ endlich, gleich 1, bleibt (man denke sich $A(\tau)$ etwa als Treppenfunktion):

$$A(\tau) = \begin{cases} \frac{4}{t_0^2} & \text{für } 0 \leqq \tau \leqq \frac{t_0}{2} \\ -\frac{4}{t_0^2} & \text{für } \frac{t_0}{2} < \tau \leqq t_0), \end{cases}$$

so strebt $\Phi(x, t)$ gegen $\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}$. Nach einer bekannten Formel ist aber

$$\int_0^{t_0}\int_0^\tau A(z)\,dz\,d\tau = \int_0^{t_0} A(\tau)(t_0 - \tau)\,d\tau.$$

Die Temperaturverteilung $\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}$ entsteht also, wenn dem Ende $x = 0$ in verschwindend kurzer Zeit t_0 eine Temperatur mitgeteilt wird, deren „Moment“ $\int_0^{t_0} A(\tau)(t_0 - \tau)\,d\tau$ gleich 1 ist.

Bei der Deutung von $\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}$ usw. würden entsprechend höhere Momente auftreten.

Da die Funktionen $\frac{\partial^n G}{\partial t^n}$ für $0 < x < 1$ sämtlich bis zum Nullpunkt

---

[7]) In ähnlicher Weise hat Fourier die Greensche Funktion im Falle des unendlich langen Stabes mit nicht verschwindender Anfangstemperatur (es handelt sich dort um die Funktion $\chi(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}$) gedeutet. Théorie analytique de la chaleur Paris 1822, Art. 377–381, S. 480–487.

solut uneigentlich integrabel sind, so besitzen sie Unterfunktionen, und ese sind nach M. I Formel (3) gleich

$$s^n L(G) = s^n \varphi_0(x, s) = s^n \frac{\sin(1-x)\sqrt{-s}}{\sin\sqrt{-s}}.$$

lle diese Funktionen sind Beispiele dafür, daß auf den Rändern $x = 0$ nd $x = 1$ Ober- und Unterfunktion einander *nicht* zu entsprechen brauchen: ir $x \to 0$ strebt die Oberfunktion gegen 0, die Unterfunktion aber gegen , und dies ist überhaupt keine Unterfunktion.

§ 3.

Der Fall des unendlich langen linearen Leiters.

Wir wollen zusehen, was aus der Greenschen Funktion $G(x, t)$ und nseren Lösungen wird, wenn der lineare Leiter immer größere Länge ekommt, d. h. wenn c gegen ∞ wandert. Es ist

$$G(x,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{x}{2c}, \frac{t}{c^2}\right)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(x+2cm)^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$$

$$= \frac{x e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{(2cm+x)\frac{e^{-\frac{(2cm+x)^2}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}} - (2cm-x)\frac{e^{-\frac{(2cm-x)^2}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty}$ strebt bei festem x gleichmäßig in $0 < t \leqq t_0$ gegen 0 ir $c \to \infty$, also folgt

$$G(x,t) \to \frac{x e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} = \psi(x,t) \text{ gleichmäßig in } 0 < t \leqq t_0.$$

erner ist

$$G(c-x,t) = \frac{(c-x)\,e^{-\frac{(c-x)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{((2m+1)c-x)\frac{e^{-\frac{((2m+1)c-x)^2}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}}\right.$$

$$\left. - ((2m-1)c+x)\frac{e^{-\frac{((2m-1)c+x)^2}{4t}}}{t^{\frac{3}{2}}}\right\} \to 0$$

ir $c \to \infty$ bei festem x, gleichmäßig in $0 < t \leqq t_0$. Schließt also bei inem sich nach einer Richtung ins Unendliche erstreckenden linearen eiter von der Anfangstemperatur 0 die Temperatur für $x \to 0$ an den Vert $A(t)$ an, so herrscht in ihm die Temperaturverteilung

$$\tilde{\Phi}(x,t) = A(t) * \psi(x,t) + S(x,t),$$

o $S(x,t)$ eine beliebige Funktion ist, die der Differentialgleichung ge-

nügt und bei normaler Annäherung an die Ränder $t = 0$ und $x = 0$ des Bereiches gegen 0 strebt. Solcher „*singulärer Lösungen*“ gibt es wieder unendlich viele, nämlich z. B. die „Greensche Funktion“ $\psi(x, t)$ und ihre Ableitungen nach t:

$$\psi(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x}{4t}},$$

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{x(x^2 - 6t)}{8\sqrt{\pi}} t^{-\frac{7}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \qquad \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t}, \ldots$$

und deren lineare Kombinationen. Die Unterfunktionen dazu lauten:

$$L(\psi) = e^{-x\sqrt{s}}, \qquad L\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = s\, e^{-x\sqrt{s}}, \qquad L\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = s^2 e^{-x\sqrt{s}}, \ \ldots,$$

wie man durch Grenzübergang aus $L(G) = \varphi_0(x, s) = \dfrac{e^{(c-x)\sqrt{s}} - e^{-(c-x)\sqrt{s}}}{e^{c\sqrt{s}} - e^{-c\sqrt{s}}}$ findet oder auch unmittelbar beweisen kann[6]).

Die Funktionen $\psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}, \ldots$ lassen analoge *physikalische Deutungen* zu, wie die singulären Lösungen im Falle des endlichen Leiters. Lord Kelvin[8]) hat auf eine ähnliche Deutung von $\psi(x, t)$ als Temperaturverteilung, erzeugt durch eine „momentane Doppelquelle“, die Herleitung der Formel $A(t) * \psi(x, t)$ aufgebaut.

Liegt der *Anfangspunkt* des linearen Leiters nicht bei $x = 0$, sondern bei $x = \alpha$, so lautet die Greensche Funktion $\psi(x - \alpha, t)$; erstreckt sich der Leiter nach links, so lautet sie $\psi(-x + \alpha, t) = -\psi(x - \alpha, t)$.

Die *Greensche Funktion* $G(x, t)$ für das *endliche Intervall* $0 \leqq x \leqq c$ läßt sich vermöge derjenigen für das unendliche Intervall $0 \leqq x$ folgendermaßen darstellen:

$$G(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi(x + 2cm, t).$$

Die Lösung

$$\Phi(x, t) = A(t) * G(x, t) + B(t) * G(c - x, t)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A(t) * \psi(2mc + x, t) + \sum_{-\infty}^{+\infty} B(t) * \psi((2m + 1)c - x, t)$$

kann daher gedeutet werden als *Superposition* der Wärmezustände, die entstehen, wenn man in den Punkten $2mc$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ nach rechts, in den Punkten $(2m + 1)c$ nach links verlaufende lineare Leiter und in den ersteren Punkten überall den Wärmezustand $A(t)$, in den letzteren den Wärmezustand $B(t)$ anbringt. Für die singulären Lösungen

[8]) Lord Kelvin, Math. and phys. papers II, p. 61.

t Entsprechendes. Durch Umkehrung dieses Gedankenganges kann man e Lösung für das endliche Intervall finden, wenn man die für das ein- itig unendliche Intervall kennt. Es kommt dies darauf hinaus, daß man ch dem Vorgange von Lamé[9]) durch Spiegelung an den Enden des tervalls die Temperatur über die ganze Gerade hinweg fortsetzt, und das Problem auf das einfachere des unendlichen Intervalls reduziert.

Wir wollen der Greenschen Funktion $G(x, t)$ und der Lösung $\Phi(x, t)$ ch eine weitere *neue Form* geben. Dazu brauchen wir das transzendente ditionstheorem der ψ-Funktion:

$$\psi(\alpha+\beta, t) = \psi(\alpha, t) * \psi(\beta, t) \quad \text{für} \quad \alpha > 0, \ \beta > 0,$$

s von Cesàro[10]) stammt und sich sehr leicht vermittels der Laplace- ansformation[11]) beweisen läßt, da für $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$L\{\psi(\alpha, t)\} = e^{-\alpha\sqrt{s}}, \quad L\{\psi(\beta, t)\} = e^{-\beta\sqrt{s}},$$

so

$$L\{\psi(\alpha, t) * \psi(\beta, t)\} = L\{\psi(\alpha, t)\} L\{\psi(\beta, t)\} = e^{-(\alpha+\beta)\sqrt{s}} = L\{\psi(\alpha+\beta, t\}$$

. Wegen $\psi(-\alpha, t) = -\psi(\alpha, t)$ können wir $G(x, t)$ in der Form hreiben:

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \psi(2cm + x, t) - \sum_{m=1}^{\infty} \psi(2cm - x, t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \psi(2cm + x, t) - \sum_{m=1}^{\infty} \psi(2c(m-1) + 2c - x, t) \\ &= \psi(x, t) + \sum_{1}^{\infty} \psi(2cm + x, t) \\ &\quad - \psi(2c - x, t) - \sum_{1}^{\infty} \psi(2cm + 2c - x, t). \end{aligned}$$

$0 < x < c$, so kann man das Additionstheorem der ψ-Funktion an- nden und wegen der gleichmäßigen Konvergenz Summe und Integral rtauschen, wodurch sich ergibt:

$$G(x, t) = \{\psi(x, t) - \psi(2c - x, t)\} * \{\breve{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \psi(2c, t)^{*m}\},$$

bei $\psi^{*m} = \underset{\hat{1}}{\psi} * \underset{\hat{2}}{\psi} * \ldots * \underset{\hat{m}}{\psi}$ sein soll und das Häkchen über 1 andeutet,

---

[9]) Lamé, Leçons sur la théorie analytique de la chaleur, Paris 1861, p. 109. rd Kelvin, l. c. [8]).

[10]) Cesàro, Sur un problème de propagation de la chaleur, Acad. royale de lg., Bull. de la cl. d. sciences, Bruxelles 1902, p. 387—407.

[11]) Bernstein und Doetsch, Die Integralgleichung usw. Vierte Note, Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl. 1922, S. 47—52 [S. 48].

daß mit 1 nicht gefaltet, sondern einfach multipliziert werden soll. In dieser Form kommt die Variable x nicht mehr in der unendlichen Reihe vor. Setzen wir

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\psi(2c,t)^{*m}=1+\Psi(t),$$

so nimmt die Lösung $A(t)*G(x,t)+B(t)*G(c-x,t)$ die Gestalt an[12]

$$\begin{aligned}\Phi(x,t)=&\{\psi(x,t)-\psi(2c-x,t)\}*\{A(t)*[\breve{1}+\Psi(t)]\}\\&+\{\psi(c-x,t)-\psi(c+x,t)\}*\{B(t)*[\breve{1}+\Psi(t)]\}\end{aligned}$$

und kann daher folgendermaßen gedeutet werden: Legt man bei der Anfangstemperatur 0 an die Enden $x=0$ und $x=c$ eines linearen Leiters die Temperaturen $A(t)$ und $B(t)$ an, so resultiert im Innern dieselbe Temperatur, als wenn man vier einseitig unendliche Leiter mit gewissen Randtemperaturen übereinanderlegt:

einen Leiter von $x=0$ an nach rechts, Randtemperatur $A(t)*[\breve{1}+\Psi(t)]$,
„ „ „ $x=2c$ „ „ links, „ $-A(t)*[\breve{1}+\Psi(t)]$,
„ „ „ $x=c$ „ „ links, „ $B(t)*[\breve{1}+\Psi(t)]$,
„ „ „ $x=-c$ „ „ rechts, „ $-B(t)*[\breve{1}+\Psi(t)]$.

Die Strecke $0\leqq x\leqq c$ wird dabei vierfach überdeckt. — Diese Darstellung der Lösung ist für ein gewisses Problem von Wichtigkeit, wie in einer späteren Mitteilung auseinandergesetzt werden wird.

---

[12]) Für $0<x<c$ ist auch $0<c-x<c$, also ist die Formel für $G(x,t)$ auch für $G(c-x,t)$ anwendbar.

(Eingegangen am 22. Juli 1924.)

Concerning the prime parts of a continuum.

By

Robert L. Moore in Austin (Texas, U. S. A.).

In his paper Über irreduzible Kontinua[1]) H. Hahn has recently introduced the notion of the *prime parts* of a continuum and has established a result which may be indicated as follows: If a bounded continuum which is irreducible between the points A and B, and which has more than one prime part, is considered as being composed of its prime parts, and not (unless its prime parts are all points) as merely a set of points, then, with respect to these elements, it is a simple continuous are from A to B. In the present paper I will show, among other things, that *every bounded continuum whatsoever which has more than one prime part is a continuous curve with respect to its prime parts.*

Definition[2]). If P is a point of a continuum M then by the *prime part* K_P (of M) is meant the set of all points $[X]$ belonging to M such that, for every positive number e, there exists a finite set of irregular[3]) points (of M) $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ such that

$$r(X, X_1) < e, \quad r(X_1, X_2) < e, \quad \ldots, \quad r(X_{n-1}, X_n) < e, \quad r(X_n, P) < e.^{4})$$

Definition. If M is a point set and P is a point then by $l(PM)$ is meant the lower bound of the distances frem P to all the different

[1]) Sitzungsber. der Akad. der Wissensch. in Wien, Math.-Naturw. Klasse **130** (1921), pp. 217–250.

[2]) See H. Hahn, loc. cit.

[3]) The continuum M is said to be *connected im kleinen at* the point P if for every positive number e there exists a positive number δ_{Pe} such that every point whose distance from P is less than δ_{Pe} lies in a connected subset of M which contains P and is of diameter less than e. An *irregular point* of M is a point at which M is not connected im kleinen. Cf. H. Hahn, Jahresber. der Deutschen Math.-Ver. **23** (1914), p. 319. Also S. Mazurkiewicz, Sur les lignes de Jordan, Fund. Math. **1** (1920), pp. 166–209 and earlier papers, in Polish, referred to therein.

[4]) If A and B are two points, the notation $r(A, B)$ denotes the distance from A to B.

points of M. If M and N are two point sets then by $l(MN)$ is meant the lower bound of the values $[l(PN)]$ for all points P of M, while by $u(MN)$ is meant the upper bound of these values for all points P of M. It is to be observed that $u(MN)$ may be different from $u(NM)$. The point set M is said to be at the upper distance $u(MN)$ from the point set N and is said to be at the lower distance $l(MN)$ from N. According to this terminology N is not always at the upper distance $u(MN)$ from M.

Definition. The prime part [5]) p is said to be a *limit prime part* or a *limit element*, of the collection of prime parts K if for every positive number e there exists some prime part which belongs to the collection K and is distinct from p and whose lower distance from p is less than e.

Definition. A set of prime parts K is said to be the *sum* of the sets of prime parts K_1 and K_2 if every prime part which belongs either to K_1 or to K_2 belongs also to K and every prime part which belongs to K belongs either to K_1 or to K_2. Two sets of prime parts are said to be mutually exclusive if there is no prime part which belongs to them both.

Definition. A set of prime parts K is said to be *connected* if it is not the sum of two mutually exclusive sets of prime parts neither of which contains a prime part which is a limit element of the other one. A set of prime parts is said to be closed if it contains all its limit elements.

Definition. A set of prime parts K is said to be *connected im kleinen*, or *regularly connected*, at the prime part p if p belongs to K and for every positive number e there exists a positive number δ_{pe} such that if q is any prime part which belongs to K and is at a lower distance from p less than δ_{pe} then K contains as a subset a connectad set of prime parts H containing both p and q and such that every prime part which belongs to the set H is at an upper distance from p less than e.

Theorem 1. *If the point set $\overline{M}$ is a connected subset of the continuum M and G is the set of all those prime parts of M which contain points of $\overline{M}$ then G is a connected set of prime parts of M.*

Theorem 2. *The set S composed of all the prime parts of M is connected im kleinen at each of its elements.*

Proof. Suppose p is a prime part of M and e is a positive number. For each point X of p construct a circle with center at X and with a radius equal to e. Let H denote the connected demain obtained by adding together the interiors of all such circles. Let E denote the point set composed of all those points of the plane that do not belong to H. Clearly

[5]) Select, once for all, some bounded continuum and let it be denoted by the letter M. Throughout the remainder of this paper, except where the contrary is indicated, by *prime part* will be meant a prime part of this particular continuum M.

point of E is at a distance less than e from any point of p. In view the fact that E and p are closed point sets with no point in common d that p is a prime part of M, it can easily be seen that there exists positive number k_{ep} such that no point Z of E can be chained to a int W of p by a chain [6]) of points whose links are all less than k_{ep} d all of whose points, with the exception of Z and W, are irregular ints of M. Let D denote the set of all points $[X]$ such that X is at distance less than one third of k_{ep} from some point of p. Let B denote e set of all those points which do not belong to D. Suppose that for ery positive integer n there exists, in D, a point P_n (belonging to M) a distance less than $1/n$ from some point of p and such that P_n cannot joined to any point of p by a connected subset of M which lies wholly $\bar{D}$, the point set composed of D plus its boundary. Then for each n ere exists a continuum h_n which is a subset of M and which contains e point P_n and at least one point of B but which lies wholly in the int set $\bar{D}$. Let k_n denote the maximal connected subset of M which ntains h_n and lies in $\bar{D}$. It is clear that k_n is closed and that it con- ns no point of p. Let n_1 denote 1 and let d_1 denote the lower dis- nce from p to k_1. Let n_2 denote the smallest integer which is greater an $1/d_1$. It is clear that k_{n_2} has no point in common with k_{n_1}. Let d_2 note the lower distance from k_{n_2} to p. Let n_3 denote the smallest in- ger which is greater than $1/d_2$. The set k_{n_3} has no point in common with her k_{n_1} or k_{n_2}. This process may be continued. It follows that there ists an increasing sequence of positive integers $n_1, n_2, n_3, \ldots$, such that two of the point sets $k_{n_1}, k_{n_2}, k_{n_3}, \ldots$ have any point in common. is sequence of point sets contains an infinite subsequence which has a quential limiting set k. It is easy to show that (a) k is a continuum which s wholly in $\bar{D}$ and contains at least one point X of p and at least one point of B, (b) M is not connected im kleinen at any point of k which does not long to p or to the boundary of D. It follows that k is a subset of some int set t which is a prime part of M. But k contains a point X in common th p and a point Y not belonging to p. Thus the prime parts t and p have point in common but are not identical. Thus a contradiction has been tained from the supposition that for every positive number there exists point of M which is at a distance from some point of p less than that mber but which cannot be joined to any point of p by a connected bset of M which lies wholly in $\bar{D}$. It follows that there exists a posi- e number δ_{pe} such that if X is any point of $M - p$ at a lower distance

[6]) By a chain of points is meant a finite sequence of points $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. ch a chain is said to *chain* (or to *join*) P_1 to P_n and its *links* are the distances $P_1, P_2)$, $r(P_2, P_3)$, $\ldots$, $r(P_{n-1}, P_n)$.

from p less than δ_{pe} then X can be joined to some point of p by a connected subset of M which lies wholly in $\bar{D}$. For any such point X of $M - p$ let M_X denote such a connected subset of M. Let G_X denote the set of all prime parts $[q]$ such that q contains at least one point of M_X. The set G_X is connected. Let q denote a prime part of M which belongs to the set G_X. The prime part q contains a point of $\bar{D}$. Hence if it contains a point of E, it contains a chain of points, with links all less than one half of k_{ep}, which joins a point of $\bar{D}$ to a point of E, all the points of this chain, except its endpoints, being irregular points of M. But every point of $\bar{D}$ is at a distance less than one half of k_{ep} from some point of p. Thus, if q contains a point of E there exists a chain of points, with links all less than k_{ep}, which joins a point of p to a point of E, every point of this chain, except its endpoints, being an irregular point of M. But this is impossible. It follows that every prime part of M which belongs to the set G_X lies wholly in H. The truth of Theorem 2 is therefore established.

Theorem 3. *If p is a prime part and e is a positive number there exists a positive number d_e such that if q is a prime part which contains one point at a distance less than d_e from some point of p then every point of q is at a distance less than e from some point of p.*

Theorem 4. *A sequence of prime parts cannot have more than one prime part as a sequential limit*[7]).

Definition. If p is a prime part and e is a positive number then by R_{pe} is meant the set of all prime parts $[q]$ such that q and p belong to some connected set of prime parts such that if r is any prime part of this set then $u(rp) < e$. For every p and e the set R_{pe} is called a *region* of prime parts of M. The region R_{pe} will be said to have p as a center and e as a radius with respect to this center. Conceivably a given region may have more than one center and more than one radius. A set of regions[8]) G is said to *cover* a set of prime parts K if every prime part which belongs to the set K belongs also to some region of the set G. A set of prime parts K is said to have the Heine-Borel-Lebesgue property if for every set of regions G which covers K there is a finite subset of G which also covers K.

Theorem 5. *If p is a prime part and e is a positive number and q is a prime part which belongs to the region R_{pe} then there exists a*

---

[7]) The prime part p is said to be a *sequential limit* of the sequence of prime parts $p_1, p_2, p_3, \ldots$ if $\operatorname{Lim} u(p_n p) = 0$.

[8]) Hereafter in this paper, except where the contrary is indicated, the word "region" means "region of prime parts of M".

itive number $\bar{e}$ such that every prime part which belongs to the region belongs also to the region R_{pe}.

Proof. Since q belongs to R_{pe} therefore $u(qp) < e$. Let $\bar{e}$ denote positive number $e - u(qp)$. It is easy to see that every prime part ch belongs to $R_{q\bar{e}}$ belongs also to R_{pe}.

Theorem 6. *If p is a prime part of M and e is a positive number e exists a positive number d such that R'_{pd} is a subset of R_{pe}.*

Proof. By Theorem 3 there exists a positive number δ, less than e, n that if q is a prime part such that $l(qp) < \delta$ then $u(qp) < e$. d denote $\frac{\delta}{2}$. Suppose t is a limit element of R_{pd}. Then there exists, R_{pd}, a prime part x such that $u(xt) < d$. Since x is in R_{pd} there- $u(xp) < d$. Hence $l(tp) < \delta$. Therefore $u(tp) < e$. Hence t is R_{pe}.

Theorem 7. *If p is a prime part and R is a region containing p n there exists a positive number e_{pR} such that R contains every prime t q such that $l(qp) < e_{pR}$.*

Theorem 8. *If K is a set of prime parts then $K + K'$ is closed*[9]).

Theorem 9. *Every set of prime parts is separable*[10]).

Proof. Suppose K is a set of prime parts. From each prime part ɔnging to this set select just one point. Let H denote the set of nts so obtained. The set H contains as a subset a countable set of nts $\overline{H}$ such that every point of H either belongs to $\overline{H}$ or is a limit nt of it. For each point of $\overline{H}$ consider the prime part which con- ns that point. Let $\overline{K}$ denote the set of all prime parts so obtained. is clear that every prime part belonging to the set K either belongs $\overline{K}$ or is a limit element of $\overline{K}$.

Theorem 10. *The prime part p is a limit element of the set of me parts K if, and only if, every region which contains p contains least one prime part which belongs to the set K and is distinct from p.*

Theorem 11. *If N is a set of prime parts and $\overline{N}$ is the set of nts obtained by adding together the points of all the elements of N n in order that N should be a closed set of prime parts it is necessary sufficient that $\overline{N}$ should be a closed set of points.*

---

[9]) By K' is meant the set of all those prime parts which are limit elements of K.

[10]) A set of prime parts K is said to be *separable* if it contains a subset $\overline{K}$ such that y element of K either belongs to $\overline{K}$ or is a limit element of $\overline{K}$. Cf. M. Fréchet, quelques points du calcul fonctionnel, Rendic. del Circ. Mat. di Palermo 22 06), p. 23.

Theorem 12. *Every closed set of prime parts has the Heine Borel-Lebesgue property.*

Proof. Suppose the closed set of prime parts N is covered by the infinite set of regions G. The set G contains a subset G^* such that G^* covers N and such that every region of the set G^* contains some prime part which belongs to the set N. Let $\bar{N}$ denote the set of points obtained by adding together all the points of the different prime parts which belong to the set N. By Theorem 11, $\bar{N}$ is closed. Since M is bounded so also is $\bar{N}$. For each point P of $\bar{N}$ select one region of the set G^* which contains that prime part to which P belongs and call that region g_P. By Theorem 7 there exists a circle C_{PG} with center at P such that g_P contains every prime part which contains a point within C_{PG}. Let H denote the set of all circles C_{PG} for all points P of $\bar{N}$. Since each point of the closed and bounded point set $\bar{N}$ is within some circle of the set H there exists a finite subset $\bar{H}$ of the set H such that every point of $\bar{N}$ is within some circle of the set $\bar{H}$. Let $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ denote the centers of the circles of the set $\bar{H}$. The finite set of regions $g_{P_1}, g_{P_2}, g_{P_3}, \ldots, g_{P_n}$ covers the set of prime parts N. The truth of Theorem 12 is therefore established.

Theorem 13. *There exists a sequence of regions $K_1, K_2, K_3, \ldots$ such that* (1) *if m is an integer and p is a prime part of M there exists an integer n, greater than m, such that K_n contains p,* (2) *if p and $\bar{p}$ are distinct prime parts belonging to a region R then there exists an integer δ such that if $n > \delta$ and K_n contains p then K_n' is a subset of $R - \bar{p}$.*

Proof. It can be easily seen with the help of Theorem 12 that for each positive integer n, M is covered by a finite set of regions $H_{n1}, H_{n2}, H_{n3}, \ldots, H_{nm_n}$ all of radius less than $1/n$. Let $K_1, K_2, K_3, \ldots$ denote the infinite sequence of regions $H_{11}, H_{12}, \ldots, H_{1m_1}, H_{21}, H_{22}, \ldots, H_{2m_2}$ $H_{31}, H_{32}, \ldots, H_{3m_3}, \ldots$. It is clear that the sequence $K_1, K_2, K_3, \ldots$ satisfies Condition (1) of Theorem 13. That it also satisfies Condition (2) may be seen as follows. Suppose p and $\bar{p}$ are two distinct prime parts and that R_{qc} is a region which contains both p and $\bar{p}$. Then $u(pq) < e$. By Theorem 5 there exists a positive number $\bar{k}$ such that the region $R_{p\bar{k}}$ is a subset of the region R_{qe}. Let k^* denote some definite positive number which is less than each of the numbers $\bar{k}$ and $l(p\bar{p})$. Then R_{pk^*} is a subset of R_{qe}. By Theorem 6 there exists a positive number k such that R_{pk}' is a subset of R_{pk^*}. By Theorem 3 there exists a positive number h less than $k/2$, such that if a prime part x is at a lower distance from p less than h then $u(xp) < k/2$. There exists a positive number δ such

at if $n > \delta$ then, for some selection of center, K_n has a radius less an h. Hence if $n > \delta$ and K_n contains p then K_n has a center t such at $u(pt) < h$ and therefore $l(tp) < h$ and accordingly $u(tp) < k/2$ d furthermore if y is any prime part belonging to K_n then $u(yt) < h$ d therefore $u(yt) + u(tp) < k$ and consequently $u(yp) < k$. It follows at if $n > \delta$ and K_n contains p then K_n' is a subset of $R_{qe} - \bar{p}$.

In view of the above theorems it is clear that if the word *point* in y paper On the foundations of plane analysis situs[11]) is interpreted to ean *prime part of M*, the space S of that paper is interpreted to mean e set of all prime parts of M and the word *region* used therein is terpreted to have the meaning attached to it in the present paper, then xioms 1, 2, 4 and 5_1 and Theorem 4 of F. A. hold true and consequently heorems 1—15 of that paper all hold true. In particular, we have the llowing results[12]):

Theorem 14. *If p and q are two distinct prime parts there exists simple continuous arc of prime parts from p to q.*

Theorem 15. *If S is the set of all prime parts of M and K is closed subset of S and $S - K$ is connected, then every two prime parts M that belong to $S - K$ are the extremities of a simple continuous c of prime parts all of which belong to $S - K$.*

It is, of course, to be understood that the term "simple continuous c" used in the statement of the above theorems is to be given the eaning attached to it in F. A., except, of course, for the substitution "prime part" in place of "point". The definition used in F. A. is bstantially that of Lennes[13]). However, in the presence of Axioms 1 r even 1′) and 4 of F. A., this definition is equivalent to another finition[14]) which seems, in some respects, simpler and which, when rime part" is substituted for "point", takes the following form.

Definition. If p and q are two distinct prime parts of M, a *simple ntinuous arc* (of prime parts of M) from p to q is a closed, connected d bounded set of prime parts which contains p and q and which is sconnected by the omission of any one of its elements which is distinct om p and from q. Of course, for present purposes (where M itself is

[11]) Trans. of the Am. Math. Soc. **17** (1956), p. 131—164. This paper will be erred to as F. A.

[12]) Cf. Theorem 15 of F. A.

[13]) Am. Journ. of Math. **33** (1911), p. 308.

[14]) Cf. my paper Concernig simple continuous curves, Trans. of the Am. Math. c. **21** (1920) p. 340. Concerning the relation of this definition to definitions given Janiszewski and Sierpinski, see the footnote on p. 340.

assumed to be bounded) the word "bounded" may be emitted from this definition.

If pq is a simple continuous arc in this sense then there exists a one to one reciprocal correspondence between the prime parts belonging to the set pq and the real numbers of the interval $(0-1)$, this correspondence being continuous in the sense that if x is a prime part belonging to the set pq, K is a subset of the set pq, $\bar{x}$ is the number corresponding to x and $\bar{K}$ is the set composed of the numbers which correspond to the different prime parts which belong to the set K, then in order that x should be a limit element of the set K it is necessary and sufficient that the number $\bar{x}$ should be a limit element of the set of numbers $\bar{K}$, that is to say that for every positive number e there should exist, in the set $\bar{K}$, numbers distinct from $\bar{x}$ but differing from $\bar{x}$ by less than e. It is not necessarily true however that every prime part of M which belongs to the set pq is a prime part of the continuum of points obtained by adding together the points of all the prime parts of the set pq. Furthermore this continuum of points is not necessarily an irreducible continuum of points. The truth of these statements may be seen with the help of an example which may be described as follows.

Example. Let O denote the point (O, O) and, for every positive integer n, let A_n, B_n, C_n and D_n respectively denote the points $(1, 1/n)$, $(-1, 1/n)$, $(-1, -1/n)$ and $(1, -1/n)$. Let E and F denote the points $(1, 0)$ and $(-1, 0)$ respectively. Let M denote the continuum obtained by adding together the points of all the intervals, OE, OF, OA_1, $OA_2, \ldots, OB_1$, $OB_2, \ldots, OC_1$, $OC_2, \ldots, OD_1$, $OD_2, \ldots$. The interval EF is the only prime part of this continuum which is not a single point. The set of prime parts consisting of the interval EF, all the points of the interval OA_1 except O, and all the points of the interval OD_1 except O, is a simple continuous arc (of prime parts of M) having A_1 and D_1 as extremities. Call this arc A_1D_1 and let H denote the continuum obtained by adding together the points of all the prime parts of M which belong to the collection A_1D_1. Though EF is a prime part of M belonging to the collection A_1D_1, it is clearly not a prime part of H. Furthermore, the continuum H is not irreducible between any two points.

If a closed and connected set of prime parts K does not contain more than one element whose omission fails to disconnect K then for some pair of prime parts p and q, belonging to K, the set K satisfies all the requirements of the above definition of a simple continuous arc from p to q and therefore (contrary to supposition) K is not disconnected by the omission either of p or of q. It follows, with the help of Theorem that the following theorem holds true:

Theorem 16[15]). *If M is a bounded continuum then M contains ore than one prime part whose omission fails to disconnect M and deed if K is any closed and connected set of prime parts of M there ists in K more than one prime part of M whose omission does not sconnect K.*

Since the space S whose elements are the prime parts of M is com-ct[16]) and satisfies Axioms 1, 2 and 4 and Theorem 4 of F. A., it is[17]) Class (V) normal of Fréchet. But it has been shown by H. Hahn[18]) at, in such a space every compact continuum which is connected im einen is the image of a straight line interval under a continuous trans-rmation. Hence the following theorem holds true.

Theorem 17. *If M is a bounded continuum in space of n-dimen-ons[19]) and I is a linear interval then the space S consisting of all e prime parts of M is the image, under some continuous transformation, the set of points constituting the interval I, that is to say the point t I may be subjected to a transformation T such that* (a) *for each int P of I, $T(P)$ is a prime part of M,* (b) *if the point P of I is limit point of the subset K of I then the prime part $T(P)$ is a limit ement of the set of prime parts $T(K)$.*

---

[15]) Cf. my paper Concerning the cut-points of continuous curves and of other osed and connected point sets, Proc. of the Nat. Acad. of Sciences 9 (1923), . 101—106. Also S. Mazurkiewicz, Un théorème sur les lignes de Jordan, Fund. ath. 2 (1921); pp. 119—130.

[16]) A space is said to be compact if every infinite set of distinct elements be-nging to it has at least one limit element. Cf. M. Fréchet, Sur quelques points calcul fonctionnel, Rendic. del Circ. Mat. di Palermo 22 (1906), pp. 1—64.

[17]) See E. W. Chittenden and A. D. Pitcher, On the theory of developments an abstract class in relation to the calcul fonctionnel, Trans. of the Am. Math. c. 20 (1919), pp. 213—233. For a definition of the phrase Class (V) normal, see réchet, loc. cit.

[18]) Mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurve, Sitzungsber. der kad. der Wissensch. in Wien, Math.-Naturw. Klasse, 123 (1914), pp. 1—57.

[19]) While I may, at times, have used, in this paper, a terminology implying at M is a subset of a space of two dimensions, it is clear that this was not cessary.

(Eingegangen am 12. Dezember 1923.)

Bemerkung zu meiner Abhandlung „Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen“[1]).

Einer liebenswürdigen Mitteilung von Herrn Ostrowski entnehme ich, daß die in § 2 meiner obigen Arbeit entwickelte Methode von ihm schon 1921 veröffentlicht wurde[2]). Leider sind die Hamburgischen Abhandlungen in Moskau auch jetzt noch nicht zugänglich, so daß ich nicht rechtzeitig auf Herrn Ostrowskis schöne Arbeit hinweisen konnte.

Moskau, den 26. Dez. 1923.

A. Khintchine.

---

[1]) Diese Zeitschrift 18 (1923), S. 289–306.

[2]) Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 1 (1921), S. 77–98.

(Eingegangen am 15. Januar 1924.)

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik werden wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften veröffentlichen, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Beiträge zur Methodik des mathematischen Unterrichts. Herausgegeben von C. Höhmann. Heft 6: Höhmann, Abgekürztes Rechnen mit Anwendungen. Breslau. Trewendt & Granier. 8°. 46 S. (1924.)

Berichte über die Verhandlungen der Sächs. Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Klasse. 67. Band, Hefte 1 bis 3. Leipzig. S. Hirzel. 8°. S. 1—175. (1924).

M. Ebner, Ausführliche Stoffauswahl für die Lehrpläne im wissenschaftlichen Zeichnen an den höheren Lehranstalten. Mit Literaturangaben. (Beihefte zur Zeitschrift für mathemat. u. naturwiss. Unterricht, 8.) Leipzig. B. G. Teubner. Gr.-8°. VI, 17 S. (1924.)

W. Lietzmann und J. Jarosch, Mathematisches Unterrichtswerk für Mittelschulen. Rechenbuch für die I.—III. Klasse. Unter Benützung des Rechenbuches für höhere Knabenschulen von P. B. Fischer bearbeitet. Wien. F. Deuticke. VII, 227 S. Gr.-8°. (1925.)

Mehler-Schulte-Tigges, Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauch an höheren Lehranstalten. A. Schulte-Tigges. Planimetrie und Arithmetik nebst den Anfangsgründen der Trigonometrie und Stereometrie und vier Anhängen. Für die unteren und mittleren Klassen höherer Lehranstalten. Ausgabe B ohne Übungen. 8°. VII, 156 S. (1923.) Ausgabe B mit Übungen. 12. Aufl. 8°. IX, 208 S. (1923.) Berlin. Walter de Gruyter & Co.

E. Salkowski, Der Gruppenbegriff als Ordnungsprinzip des geometrischen Unterrichts. Ein Beitrag zur Methodik des mathematischen Unterrichts. (Beihefte zur Zeitschr. für mathemat. u. naturwiss. Unterricht, 7.) Leipzig. B. G. Teubner, Gr.-8°. IV, 59 S. (1924.)

M. Schaalmann, Absolutorialaufgaben aus Mathematik und Physik für Oberrealschulen. Systematisch geordnet. Nürnberg, Korn. Kl.-8°. IV, 80 S. (1924.)

M. Schaalmann, Absolutorialaufgaben aus Mathematik und Physik für Gymnasien und Realgymnasien 1910—1924. Systematisch geordnet. Nürnberg, Korn. Kl.-8°. III, 46 S. (1924.)

Schulte-Tigges, Geometrische Aufgaben und Übungen für höhere Lehranstalten aus Mehlers Hauptsätzen der Elementar-Mathematik (Ausgabe B), Unterstufe. Berlin. Walter de Gruyter & Co. 8°. III, 58 S. (1923.)

A. Schulte-Tigges, Rechentafeln für höhere Lehranstalten, insbesondere zu Mehlers Hauptsätzen der Elementar-Mathematik. Berlin. Walter de Gruyter & Co. 8°. 16 S. (1923.)

E. Weighardt, Mathematische Geographie und Astronomie für die Oberprima der Realanstalten (und für Studierende zur Einführung) in geschichtlicher Entwicklung. München. R. Oldenbourg. IX, 127 S. 8°. (1924.)

VERLAG L. W. SEIDEL & SOHN, WIEN

Dr. Hermann Rothe
Professor an der Technischen Hochschule in Wien

Vorlesungen über höhere Mathematik

2., verbesserte Auflage — Mit 142 Figuren — In Halbleinenband G.-M. 16.—

Über dieses vortreffliche moderne Lehrbuch schreibt die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik", 1921:

Es ist dem Verfasser gelungen, die — durch zahlreiche Beispiele unterstützte — **Darstellung selbst für den Ungeübten durchaus verständlich und recht anregend** zu gestalten. Die deutliche Hervorhebung aller Definitionen, Sätze und Formeln und beständige Hinweise auf frühere Stellen des Textes lassen das Buch **auch als Nachschlagewerk für Ingenieure und Naturwissenschaftler recht brauchbar** erscheinen . . . **Die große Klarheit, Anschaulichkeit und Deutlichkeit, mit der er es verstanden hat, den spröden Stoff zu meistern, zeugt jedenfalls von besonderem pädagogischen Geschick und von Verständnis für die Bedürfnisse des Lernenden. Dem Ingenieur, der in die Denkweise der modernen Analysis eindringen und ihre schönen Früchte kennen lernen will, kann kein geeigneterer Weg empfohlen werden als das Rothesche Buch.**

Dr. Hermann Rothe

Einführung in die Tensorrechnung

Mit einem Vorwort von R. Weitzenböck — 180 Seiten Oktav, 1924 — Preis kartoniert G.-M. 5.—

„Dieses Buch, als eine vollständige Darstellung der Tensoralgebra, füllt eine offenbare Lücke auf und bietet die beste Einführung in einen so wichtigen und schwierigen Gegenstand."
(Nature, London.)

Eine Einführung in das Verständnis der Relativitätstheorie.

Dr. Eugenio Bertini
Professor an der Universität in Pisa

Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume

Mit einem Anhang über algebraische Kurven und ihre Singularitäten

Berechtigte deutsche Ausgabe von Dr. **Adalbert Duschek.**

XXIV und 480 Seiten — Gebunden G.-M. 25.—

Die einzige zusammenfassende und systematische Darstellung der Geometrie mehrdimensionaler Räume.

Dr. techn. Alfred Lechner
Professor an der technischen Hochschule in Wien

Enzyklopädie der Mechanik

Ein Lehrbuch für die Studierenden an Technischen Hochschulen und Universitäten

352 Seiten mit 318 Figuren, Großoktav, 1923 — Preis gebunden G.-M. 12.80

Ein neues kurzgefaßtes Lehrbuch für Studium und Praxis. Enthält die Hauptprobleme der gesamten Mechanik und ihre Anwendungen auf Probleme des Maschinenbaues und der Baustatik.

Hartner-Doležal

Hand- und Lehrbuch der niederen Geodäsie

11. Auflage, 1921, Großoktav. I. Band, 1. Teil und I. Band, 2. Teil, 1114 Seiten. II. Band, 584 Seiten
In 3 Halbleinenbänden gebunden G.-M. 54.—

Herr-Tinter

Lehrbuch der sphärischen Astronomie

In ihrer Anwendung auf geographische Ortsbestimmung

644 Seiten, Großoktav, Zweite Auflage. — Preis gebunden G.-M. 24.—

Dr. Emanuel Czuber

Die statistischen Forschungsmethoden

234 Seiten auf holzfreiem Papier mit 35 Figuren im Text, Großoktav, 1921. — Preis gebunden G.-M. 7.50

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.